Sommersemester 2008

5. Übungsserie zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe der Lösungen in der 6. Übungsstunde

1. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen:

   a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + 2y' + y = 0$

   c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der "Variation der Konstanten" sämtliche Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

   a) $y'' - y = \dfrac{-2}{1+e^x}$ $\boxed{\text{b)}}$ $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

3. Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 2.Ordnung:

   a) $y'' - 2y' + 2y = 2x$

   b) $y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x}$

   $\boxed{\text{c)}}$ $y'' + 2y' + y = 3x^2e^{-x}$

   d) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x$

4. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 3x + 5$ $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$

   $\boxed{\text{b)}}$ $y'' - 7y' + 6y = 74\sin x$ $y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 3$

5. a) Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = 0\ .\quad a_k \in \mathbb{R}$$

   Zeigen Sie, dass sie durch die Substitution der unabhängigen Variablen $x = e^t$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $z(t) = y(e^t)$ überführt werden kann.
   Hinweis:
   Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass man $x^k y^{(k)}$ als eine Linearkombination mit konstanten Koeffizienten von Ableitungen $\dfrac{d^r z}{dt^r}$ darstellen kann.

   b) Geben Sie einen Ansatz für diese Differentialgleichung durch Kombination der Substitution mit dem Ansatz für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten an.

6. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ $y(-1) = 0\ ,\ y'(-1) = 1$

   $\boxed{\text{b)}}$ $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$ $y(1) = 1\ ,\quad y'(1) = 0$

   Hinweis zu 6a: Modifizieren Sie den Ansatz aus 5b für $x < 0$!