

6. Übungsserie zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am 11.07.2007

1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ $y(-1) = 0, y'(-1) = 1$
b) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$ $y(1) = 1, y'(1) = 0$
c) $x^2y'' + 6xy' + 6y = e^x$ $y(1) = -1, y'(1) = 2$
d) $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$ $y(1) = 0, y'(1) = 0$

2. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

- a) $x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$ $y_1(x) = x^3$ $y(1) = 7, y'(1) = 7$
b) $x(2x + 1)y'' + 2(x + 1)y' - 2y = 0$ $y_1(x) = x^{-1}$ $y(1) = 3, y'(1) = 3$
c) $x^3y''' + (3x^3 - 6x^2)y'' + (2x^3 - 12x^2 + 18x)y' - (4x^2 - 18x + 24)y = 0$ $y_1(x) = x^2$
d) $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$ Ansatz: $y_1(x) = e^{cx}$ $c \in \mathbb{R}$

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der der Differentialgleichung an

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad .$$

4. Geben Sie die allgemeine Lösung der der Differentialgleichung an

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0 \quad .$$

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichungen

- a) $y'' + y' + \lambda y = 0$ $y(0) = 0, y(1) = 0$
b) $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0$ $y(0) = 0, y'(1) = 0$

7. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0 \quad .$$

Hinweis: Nach Multiplikation mit x erhalten Sie eine Eulersche Differentialgleichung.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.