Gewöhnliche Differentialgleichungen
FSU Jena - SS 2007
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

29. Juli 2007

Aufgabe 01

a)

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \;\rightarrow\; Ansatz:\; y = e^{\lambda x} \;\rightsquigarrow\; y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$$

b)

$$y'' + 2y' + y = 0 \;\rightarrow\; Ansatz:\; y = e^{\lambda x} \;\rightsquigarrow\; \lambda = -1 \;\rightsquigarrow\; y = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

c)

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \;\rightarrow\; Ansatz:\; y = e^{\lambda x} \;\rightsquigarrow\; \lambda = 1 \pm i \;\rightsquigarrow\; y = e^x \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

d)

$$y''' - y'' + 2y = 0 \;\rightarrow\; Ansatz:\; y = e^{\lambda x} \;\rightsquigarrow\; (\lambda+1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i) = 0 \;\rightsquigarrow\; y = C_1 \cdot e^{-x} + e^x \cdot (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

Aufgabe 02

In folgenden Aufgaben ist die Allgemeine Lösung $y(x)$ gegeben durch die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL und einer partikulären Lösung $y_p(x)$ des inhomogenen Falls: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

a)

$$y'' - y = \frac{-2}{1+e^x}$$
$$Homogene:\; Ansatz:\; y = e^{\lambda x} \;\rightsquigarrow\; y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$Inhomogene: Ansatz:\; y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x},\; u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{-x} = 0 \;\wedge\; u_1'(x)e^x - u_2'(x)e^{-x} = \frac{-2}{1+e^x}$$

$$\rightsquigarrow\; u_1 = x + e^{-x} - \ln(e^x+1),\; u_2 = \ln(e^x+1) \;\Rightarrow\; y_p = xe^x + 1 + \left(e^{-x} - e^x\right) \cdot \ln(e^x+1)$$

b)

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$Ansatz: \ y = e^{\lambda x} \ \rightsquigarrow \ \lambda = \pm 2i \ \rightarrow \ y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$Ansatz: \ y_p = u_1(x)\cos 2x + u_2(x)\sin 2x \ , u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\sin 2x = 0, \ -2u_1'\sin 2x + 2u_2'\cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$\rightsquigarrow \ u_1' = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x} \ \wedge \ u_2' = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ u_1 = \frac{\ln|\cos 2x|}{4} \ \wedge \ u_2 = \frac{x}{2} \ \Rightarrow \ y_p = \frac{\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|}{4} + \frac{x\sin 2x}{2}$$

c)

$$y'' + y = \tan x \ \rightsquigarrow \ y_h = C_1\cos x + C_2 \sin x$$

$$Ansatz: y_p = u_1(x)\cdot\cos x + u_2(x)\cdot\sin x \ , \ u_1'\cos x + u_2'\sin x = 0 \ \wedge \ -u_1'\sin x + u_2'\cos x = \tan x$$

$$\rightsquigarrow \ u_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \ \wedge \ u_2' = \sin x \ \rightsquigarrow \ u_1 = \sin x - \ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right|, \ u_2 = -\cos x$$

$$\Rightarrow \ y_p = -\cos x \cdot \ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right|, \ \tan\frac{x}{2} \neq \pm 1$$

Aufgabe 03

a)

$$y'' - 2y' + 2y = 2x$$

$$Homogene: Ansatz: \ y = e^{\lambda x} \ \rightsquigarrow \ y_h = e^x \cdot (\cos x + \sin x)$$

$$Inhomogene: Ansatz: \ y_p = \alpha x + \beta \ \rightsquigarrow \ y_p = 1 + x$$

b)

$$y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x}$$

$$Homogene: Ansatz: \ y = e^{\lambda x} \ \rightsquigarrow \ y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$Inhomogene: Ansatz: \ y_p = \alpha x e^{-x} \ \rightsquigarrow \ \alpha = -2 \ \Rightarrow \ y_p = -2xe^{-x}$$

c)

$$y'' + 2y' + y = 3x^2 e^{-x}$$

$$Homogene: Ansatz: \ y = e^{\lambda x} \ \rightsquigarrow \ y_h = e^{-x}\cdot(C_1 + C_2 x)$$

$$Inhomogene: Ansatz: \ y_p = \left(\sum_{k=0}^{4} \alpha_k \cdot x^k\right)\cdot e^{-x} \ \rightsquigarrow \ y_p = \frac{x^4}{4}\cdot e^{-x}$$

d)

$$y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x \;\rightsquigarrow\; y_h = e^{-x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$Ansatz: \; y_p = \alpha \sin x + \beta \cos x \;\rightsquigarrow\; \alpha = 3,\; \beta = 4 \;\Rightarrow\; y_p = 3\sin x + 4\cos x$$

e)

$$y'' + 2y' + y = 10e^{2x}(2\cos x + \sin x) \;\rightsquigarrow\; y_h = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

$$Ansatz: \; y_p = e^{2x} \cdot (\alpha \cos x + \beta \sin x) \;\rightsquigarrow\; \alpha = 1,\; \beta = 2 \;\Rightarrow\; y_p = e^{2x} \cdot (\cos x + 2\sin x)$$

f)

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{2x} + 32\cos 4x + 16x^2 - 6 \;\rightsquigarrow\; y_h = e^{4x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

$$Ansatz: \; y_p = \alpha e^{2x} + \beta \sin 4x + \gamma \cos 4x + \delta + \varepsilon x + \zeta x^2 \;\rightsquigarrow\; \alpha = 2,\; \zeta = \varepsilon = 1,\; \gamma = \delta = 0,\; \beta = -1$$

$$\Rightarrow\; y_p = 2e^{2x} - \sin 4x + x + x^2$$

Aufgabe 04

a)

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 3x + 5 \;\rightsquigarrow\; y_h = e^{3x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

$$Ansatz: y_p = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \;\rightsquigarrow\; y_p = 1 + x + x^2$$

$$AWP \;\rightsquigarrow\; y = e^{3x} \cdot (2x - 1) + 1 + x + x^2$$

b)

$$y'' - 7y' + 6y = 74\sin x \;\rightsquigarrow\; y_h = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$$

$$Ansatz: y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x \;\rightsquigarrow\; y_p = 7\cos x + 5\sin x$$

$$AWP \;\rightsquigarrow\; y = e^{6x} - 8e^{x} + 7\cos x + 5\sin x$$

c)

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x \;\rightsquigarrow\; y_h = C_1 e^{x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$$Ansatz: y_p = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \;\rightsquigarrow\; y_p = -1 - 3x - x^2$$

$$AWP \;\rightsquigarrow\; y = e^{x} - 1 - 3x - x^2$$

d)

$$y''' - y'' - 16y' - 20y = -(12x+5)e^{2x} \;\rightsquigarrow\; y_h = C_1 e^{5x} + e^{-2x} \cdot (C_2 + C_3 x)$$

$$Ansatz: y_p = (\alpha + \beta x)e^{2x} \;\rightsquigarrow\; y_p = \left(\frac{1}{16} + \frac{x}{4}\right) \cdot e^{2x}$$

$$AWP \;\rightsquigarrow\; y = \left(-\frac{1}{16} + \frac{x}{2}\right) \cdot e^{-2x} + \left(\frac{1}{16} + \frac{x}{4}\right) \cdot e^{2x}$$

Aufgabe 05

a) Aus Teil (b) folgt automatisch

$$W' = -p_1(x)W$$

und ferner

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$$

b)

$$W' = \begin{vmatrix} u_1' & ... & u_n' \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ u_1^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1^{(2)} & ... & u_n^{(2)} \\ . & .. & . \\ u_1^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ u_1^{(n)} & ... & u_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 + 0 + ... + \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ u_1^{(n)} & ... & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ -\sum_{k=1}^{n-1} p_k(x)u_1^{(k)} & ... & -\sum_{k=1}^{n-1} p_k(x)u_n^{(k)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ -p_{n-1}(x)u_1^{(n-1)} & ... & -p_{n-1}(x)u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= -p_{n-1}(x) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & ... & u_n \\ u_1' & ... & u_n' \\ . & .. & . \\ u_1^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_{n-1}(x) \cdot W \;\Rightarrow\; \int_{W(x_0)}^{W(x)} \frac{dW}{W} = \int_{x_0}^{x} -p_{n-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow\; W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}$$