

5. Übungsserie zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am 27.06.2007

1. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

d) $y''' - y'' + 2y = 0$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der "Variation der Konstanten" sämtliche Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' - y = \frac{-2}{1 + e^x}$

b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

c) $y'' + y = \tan x$

3. Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

a) $y'' - 2y' + 2y = 2x$

b) $y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x}$

c) $y'' + 2y' + y = 3x^2e^{-x}$

d) $y'' + 2y' + 5y = 4 \sin x + 22 \cos x$

e) $y'' + 2y' + y = 10e^{2x}(2 \cos x + \sin x)$

f) $y'' - 8y' + 16y = 8e^{2x} + 32 \cos 4x + 16x^2 - 6$

4. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 3x + 5$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$

b) $y'' - 7y' + 6y = 74 \sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 3$

c) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

$y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = -1$

d) $y''' - y'' - 16y' - 20y = -(12x + 5)e^{2x}$

$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

5. Die Koeffizientenfunktionen der folgenden linearen Differentialgleichungen seien stetig auf dem Intervall I . Zeigen Sie

a) Für zwei beliebige Lösungen u_1, u_2 der homogenen Differentialgleichung $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ erfüllt die Wronskideterminante $W(u_1, u_2)(x)$ stets die Differentialgleichung $W' = -p_1(x)W$ und besitzt damit die Lösung

$$W(u_1, u_2)(x) = W(u_1, u_2)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} \quad x_0 \in I \quad .$$

b) Für die Wronskideterminante von n Lösungen u_1, u_2, \dots, u_n einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung gilt dementsprechend

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n)(x) = W(u_1, u_2, \dots, u_n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t) dt} \quad x_0 \in I \quad .$$

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.