Sommersemester 2007

4. Übungsserie zur Vorlesung - Lösungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. (a) $5x^2 - 4xy + y^2 - 2 = 0 \quad , \quad y(x) = 2x + \sqrt{2 - x^2} \quad |x| < \sqrt{2}$

   (b) $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0 \quad , \quad y(x) = \frac{2x}{2 - x^2} \quad |x| < \sqrt{2}$

   (c) $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 - 1 = 0 \quad , \quad y(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^3 + \sqrt{\frac{9}{4}x^6 - x^2 + 1}}$

   (d) $x^2 e^y - x + y = 0 \quad , \quad x(y) = \frac{e^{-y}}{2}(1 + \sqrt{1 - 4ye^{-y}}) \quad y \leq \eta = 0.20388...$

   (e) $x \cos y + x^2 y - \frac{y^2}{2} + 1 = 0 \ , \ x(y) = \frac{1}{2y}\left(\cos y - \sqrt{2y^3 - 4y + (\cos y)^2}\right) \quad y \geq \sqrt{2}$

2. (a) $M(x) = x^2 \quad , \quad x^4 + x^3y^2 + c = 0$

   (b) $M(y) = \frac{1}{y^4} \quad , \quad -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} + c = 0 \quad , \quad cy^3 - x^2 + y^2 = 0$ und $y(x) \equiv 0$

   (c) $M(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad (y - x)^3 - \frac{\sin x}{x} - c = 0 \quad , \quad y(x) = x + \sqrt[3]{c + \frac{\sin x}{x}}$

   (d) $M(xy) = \frac{1}{xy} \quad , \quad y(x) = -\frac{x}{\ln(-x) + 1} \qquad -\infty < x < -\frac{1}{e}$

3. Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit der angegebenen Funktion $M(x)$ und überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingung -

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y)M(x)\big) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ M(x) \\
\frac{\partial}{\partial x}\big(Q(x,y)M(x)\big) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ M(x) + Q(x,y)\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)\,dx}\right) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ M(x) + Q(x,y)M(x)f(x)
\end{aligned}
$$

4. Hinweis: Um das Lemma der Vorlesung anzuwenden wähle man

$$r(x) := |y(x;f) - y(x;g)| + \frac{\sigma}{L} \ .$$

5. Die Substitution

$$y_1 := y \quad , \quad y_2 := y'$$

führt zu dem Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \qquad & y_1(0) = 0 \\
y_2' &= -y_1 \qquad & y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

und die Iteration zu den erwarteten Lösungen $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \cos x$.