Sommersemester 2007

4. Übungsserie zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am 13.06.2007

1. Zeigen Sie, dass eine exakte Differentialgleichung vorliegt, und lösen Sie diese:

   a) $(5x - 2y) + (y - 2x)y' = 0$, $y(1) = 3$

   b) $\dfrac{1}{y} + x - \dfrac{x}{y^2}y' = 0$, $y(1) = 2$

   c) $(2x - 9x^2y^2) + (4y^3 - 6x^3y)y' = 0$, $y(0) = 1$

   $\boxed{\text{d)}}$ $(2xe^y - 1) + (x^2e^y + 1)y' = 0$, $y(1) = 0$

   e) $(\cos y + 2xy) + (x^2 - y - x\sin y)y' = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$

2. Bestimmen Sie den integrierenden Faktor und lösen Sie die Differentialgleichung:

   a) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

   b) $-2xy + (3x^2 - y^2)y' = 0$

   c) $\sin x - x\cos x - 3x^2(y-x)^2 + (3x^2(y-x)^2)y' = 0$ Hinweis: $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'$

   $\boxed{\text{d)}}$ $(x + y) - \dfrac{x^2}{y}y' = 0$, $y(-1) = 1$ (Definitionsgebiet der Lösung angeben).

3. Die Koeffizientenfunktionen $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ der Differentialgleichung $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ mögen in einem Rechteck Q stetige partielle Ableitungen besitzen.
   Zeigen Sie: Hängt die Funktion $f = \frac{1}{Q(x,y)}[\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)]$ nur von x ab, so ist $M(x) = e^{\int f(x)\,dx}$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung.

4. Gegeben seien auf dem Intervall $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ die Lösungen $y(x;f)$ und $y(x;g)$ der beiden Anfangswertprobleme

   $$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0 \qquad \text{und} \qquad y' = g(x,y) \quad y(x_0) = y_0 \quad .$$

   Dabei sei $Q = J \times [\alpha, \beta]$ so gewählt, dass beide Lösungskurven ganz in Q liegen. Die Funktionen f und g seien auf Q stetig und f erfülle auf Q eine Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten L, d.h.

   $$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}| \quad .$$

   Ferner gelte

   $$||f - g|C(Q)|| = \sup_{(x,y)\in Q} |f(x,y) - g(x,y)| \leq \sigma \quad .$$

   Zeigen Sie, dass dann folgende Abschätzung gilt:

   $$|y(x;f) - y(x;g)| \leq \frac{\sigma}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right) \qquad \text{für alle} \quad x \in J \quad .$$

5. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

   $$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$$

   als Grenzwert des im Beweis von Satz 1 (Abschnitt 2.1 bzw. 2.2) beschriebenen Iterationsprozesses.

   Anleitung: Formen Sie die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung um, bestimmen Sie die zugehörigen Integraloperatoren und führen Sie den Iterationsprozess durch.

Die mit $\boxed{}$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.