Gewöhnliche Differentialgleichungen
FSU Jena - SS 2007
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

28. Juli 2007

Aufgabe 01

a)

$$y' = -2y \ \rightarrow \ Sonderlösung : y \equiv 0$$

$$y \neq 0 : \ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int -2dx = -2x + \ln C', \ C' > 0 \ \Rightarrow \ |y| = C' \cdot e^{-2x} \Rightarrow \ y = C \cdot e^{-2x}, C \in \mathbb{R}$$

$$\forall \ (x_0, y_0) : Setzen : C = y_0 \cdot e^{2x_0} \ \rightarrow \ Eindeutig \ lössbar$$

b)

$$y' = -sgn(y)\sqrt{|y|}x \ \rightarrow \ Sonderlösung : y \equiv 0$$

$$y > 0 : 2\sqrt{y} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int -x \cdot dx = -\frac{x^2}{2} + C, \ |x| < \sqrt{2C}, \ C > 0$$

$$y < 0 : -2\sqrt{-y} = \int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} - C, \ |x| < \sqrt{2C}, \ C > 0$$

$$\Rightarrow \ y \neq 0 \rightarrow \ y(x) = \pm \left(\frac{C}{2} - \frac{x^2}{4} \right)^2$$

$$\forall \ (x_0, y_0), \ y_0 > 0 : Setzen : C = 2\sqrt{y_0} + \frac{x_0^2}{2} \ , \ \forall \ (x_0, y_0), \ y_0 < 0 : Setzen : C = 2\sqrt{-y_0} + \frac{x_0^2}{2} \ \rightarrow \ eindeutig$$

$$Doch \ für \ y_0 = 0 \ sind \ y(x) \equiv 0 \ aber \ auch \ y(x) = \left(\frac{C}{2} - \frac{x^2}{4} \right)^2 \ Lösungen \ für \ geeignete \ C. \ \rightarrow \ lokal \ nicht \ eindeutig!$$

c)

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}\cos x \;\rightarrow\; Sonderlösung: y \equiv 0$$

$$y \neq 0: \sqrt[3]{y} = \int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C \;\Rightarrow\; y(x) = (\sin x + C)^3\,,\; \sin x \neq -C$$

$$\forall\ (x_0, y_0),\; y_0 \neq 0: Setzen: C = \sqrt[3]{y_0} - \sin x_0 \;\rightarrow\; eindeutig\ lösbar$$

$$Für\ y_0 = 0: y(x) \equiv 0\ aber\ auch\ y(x) = (\sin x + C)^3\ sind\ Lösungen\ für\ geeignetes\ C. \;\rightarrow\; lokal\ nicht\ eindeutig!$$

Aufgabe 02

a)

$$y' = (x+y)^2 \;\; Sub: t(x) := x + y(x) \;\Rightarrow\; t' = 1 + y' = 1 + t^2$$

$$\Rightarrow\; \arctan(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \int dx = x + C,\; C \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = \tan(x+C) - x,\; Alle\ AWP\ sind\ eindeutig\ lösbar.$$

b)

$$y' = (x - y + 3)^2 \;\; Sub: t(x) = x - y + 3 \;\Rightarrow\; t' = 1 - y' = 1 - t^2$$

$$t(x) = \pm 1\ bzw.\ y(x) = x + 3 \pm 1 \;\rightarrow\; Sonderlösung$$

$$t \neq \pm 1\ bzw.\ y \neq x + 3 \pm 1: \;\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int dx = x + \frac{\ln C'}{2},\; C' > 0$$

$$\Rightarrow\; \left|\frac{1+t}{1-t}\right| = C'e^{2x} \;\Rightarrow\; \frac{1+t}{1-t} = Ce^{2x},\; C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;\Rightarrow\; t = \frac{Ce^{2x}-1}{1+Ce^{2x}}$$

$$\Rightarrow\; y(x) = x + 3 - \frac{Ce^{2x}-1}{1+Ce^{2x}},\; x \neq -\ln(-C)\ falls\ C < 0,\; Alle\ MWP\ sind\ eindeutig\ lösbar$$

c)

$$y' = \frac{x-y-1}{x-y+1}\,,\; y \neq x + 1$$

$$Sub: t(x) = x - y \;\Rightarrow\; t' = 1 - y' = 1 - \frac{t-1}{t+1} = \frac{2}{t+1} \;\Rightarrow\; \frac{t^2}{2} + t = \int (t+1)dt = \int 2dx = 2x + C'$$

$$\Rightarrow\; (x-y)^2 + 2(x-y) = 4x + 2C' \;\Rightarrow\; y^2 - 2(x+1)y + (x^2 - 2x - 2C') = 0$$

$$\Rightarrow\; y(x) = (x+1) \pm \sqrt{4x + C},\; C \in \mathbb{R},\; x > -\frac{C}{4},\; Für\ y_0 \neq x_0 + 1 \;\rightarrow\; eindeutig\ lösbar$$

Aufgabe 03

a)

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right), \quad Sub: t := \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = xt' + t = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right) \;\Rightarrow\; t' = \frac{t^2-2t+1}{2x} = \frac{(t-1)^2}{2x},\; x \neq 0$$

$$t = 1 \; bzw. \; y(x) = x \; Sonderlösung$$

$$t \neq 1 \; bzw. \; y \neq x: \frac{1}{1-t} = \int \frac{dt}{(t-1)^2} = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{C}{2},\; C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\; y(x) = x - \frac{2x}{\ln|x|+C},\; 0 \neq |x| \neq e^{-C}$$

b)

$$xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}, \quad Sub: t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = t + xt' = t + \sqrt{1+t^2} \;\Rightarrow\; t' = \frac{\sqrt{1+t^2}}{x},\; x \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C' = \ln|xC'|,\; C' > 0$$

$$\Rightarrow\; \left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = C'\,|x| \;\Rightarrow\; t+\sqrt{1+t^2} = \pm C'x = Cx,\; C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow\; t = \frac{C^2x^2-1}{2xC} \;\Rightarrow\; y = \frac{C^2x^2-1}{2C}$$

c)

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad Sub: t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = t + xt' = \frac{1}{t} + t,\; y, x \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{t^2}{2} = \int t \cdot dt = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \frac{C}{2} \;\Rightarrow\; y^2 = x^2\left(2\ln|x| + C\right),\; |x| > e^{-\frac{C}{2}}$$

Aufgabe 04

a)

$$xy' - y = x\tan\frac{y}{x}, \quad Sub: t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = xt' + t = t + \tan t,\; x \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \ln|\sin t| = \int \frac{dt}{\tan t} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C',\; C' > 0$$

$$\Rightarrow\; \sin t = \sin\frac{y}{x} = Cx,\; C \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\; 0 \neq |x| \leq \frac{1}{|C|}$$

$$y(1/2) = \pi/12 \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; y = x \cdot \arcsin(x),\; x \in (-1,0)\cup(0,1)$$

b)

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, \quad Sub: t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = t'x + t = t^2 - 2 \;\Rightarrow\; t' = \frac{t^2 - t - 2}{x},\; x \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| = \int \frac{dt}{(t-2)(t+1)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C',\; C' > 0,\; t \neq -1 \; bzw. \; y \neq -x$$

$$\Rightarrow\; \sqrt[3]{\frac{t-2}{t+1}} = Cx,\; C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\Rightarrow\; y = t \cdot x = x \cdot \frac{2 + C^3x^3}{1 - C^3x^3},\; x \neq \frac{1}{C}$$

$$y(1) = 1 \;\Rightarrow\; C^3 = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y(x) = x \cdot \frac{4 - x^3}{2 + x^3},\; x \in \mathbb{R} - \{0, -\sqrt[3]{2}\}$$

c)

$$(x - y)y' = y \;\rightarrow\; Sonderlösung: y(x) \equiv 0$$

$$y \neq 0: y' = \frac{y}{x-y} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},\; Sub: t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y' = xt' + t = \frac{t}{1-t},\; y \neq x \neq 0$$

$$\Rightarrow\; t' = \frac{t^2}{x(1-t)} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{t} - \ln|t| = \int \frac{(1-t)}{t^2}dt = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C' \;\Rightarrow\; x = -\left(\ln|y| + C\right) y$$

$$y(2) = 1 \;\Rightarrow\; C = -2 \;\Rightarrow\; x = (2 - \ln|y|)\, y,\; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-e^2, e^2, 0\right\}$$

Aufgabe 05

a)

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}, \quad Suchen: \xi, \eta: \xi + 2\eta + 1 = 0 = 2\xi - 3 \;\Rightarrow\; \xi = \frac{3}{2},\; \eta = -\frac{5}{4}$$

$$x =: u + \xi = u + \frac{3}{2},\; y =: v + \eta = y - \frac{5}{4},\; v(u) := y(u + \xi) - \eta = y\left(u + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\; \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}\left(u + \frac{3}{2}\right) = \frac{u + 2v}{2u} = \frac{1}{2} + \frac{v}{u},\; u \neq 0$$

$$Sub: t = \frac{v}{u} \;\Rightarrow\; v' = ut' + t = \frac{1}{2} + t \;\Rightarrow\; t = \frac{v}{u} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C'$$

$$\Rightarrow\; \frac{y + \frac{5}{4}}{x - \frac{3}{2}} = \ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C' \cong \ln|2x - 3| + C,\; x \neq \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y = \frac{2(2x-3)\left(\ln|2x-3| + C\right) - 5}{4}$$

$$y(1) = -\frac{5}{4} \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{2(2x-3)\ln|2x-3| - 5}{4}$$

b)

$$y' = \frac{x+y-2}{-x+y-4},\ y \neq x+4,\quad Suchen: \xi, \eta : \xi + \eta - 2 = 0 = -\xi + \eta - 4 \ \Rightarrow\ \xi = -1,\ \eta = 3$$

$$x =: u + \xi = u - 1,\ y =: v + \eta = v + 3,\ v(u) := y(u+\xi) - \eta = y(u-1) - 3$$

$$\Rightarrow\ \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}(u-1) = \frac{u+v}{-u+v} = \frac{1+\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}},\ u \neq 0\ bzw.\ x \neq -1$$

$$Sub: t := \frac{v}{u}\ \Rightarrow\ v' = ut' + t = \frac{t+1}{t-1}\ \Rightarrow\ t' = \frac{-t^2+2t+1}{(t-1)u}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\cdot \ln\left|-t^2+2t+1\right| = -\frac{1}{2}\cdot \int \frac{-2t+2}{-t^2+2t+1}dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| - \frac{\ln C'}{2},\ C' > 0\ \Rightarrow\ \left|t^2 - 2t - 1\right| = \frac{C'}{u^2}$$

$$\Rightarrow\ t^2 - 2t - 1 = \frac{C}{u^2},\ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \Rightarrow\ v^2 - 2vu - (u^2 + C) = 0\ \Rightarrow\ y^2 - 2(4+x)y + (14 + 4x - x^2 - C) = 0$$

$$\Rightarrow\ y(x) = (4+x) \pm \sqrt{2 + 2x^2 + 4x + C} = (4+x) \pm \sqrt{2x^2 + 4x + K},\quad K := 2 + C \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ 2x^2 + 4x + K > 0,\ x \neq -1$$

$$y(1) = 3\ \Rightarrow\ K = -2\ \Rightarrow\ y(x) = (x+4) - \sqrt{2x^2 + 4x - 2}$$

c)

$$y' = \frac{y+1}{x+2} - e^{\frac{y+1}{x+2}},\ x \neq -2,\quad Sub: t := \frac{y+1}{x+2}\ \Rightarrow\ y' = t'(x+2) + t = t - e^t\ \Rightarrow\ t' = \frac{-e^t}{x+2}$$

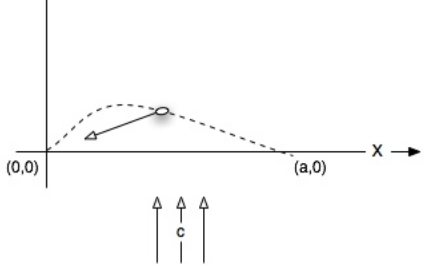
$$\Rightarrow\ e^{-t} = \int -e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C,\ C \in \mathbb{R},\ |x+2| > e^{-C}$$

$$y(0) = 0\ \Rightarrow\ C = 1 - \ln 2\ \Rightarrow\ e^{-t} = \ln\left|(x+2)\cdot\frac{e}{2}\right|\ \Rightarrow\ t = -\ln\left(\ln\left|(x+2)\cdot\frac{e}{2}\right|\right)$$

$$\Rightarrow\ y = -(x+2)\ln\left(\ln\left|(x+2)\cdot\frac{e}{2}\right|\right) - 1,\ |x+2| > \frac{2}{e}$$

Aufgabe 06

Wir setzten unseren Koordinatenursprung an die Position des Herren, wobei sich der Hund ursprünglich in den Koordinaten $(a, 0)$ befinde. Die Geschwindigkeit v_0 des Hundes, die Flussgeschwindigkeit c und die Breite a des Flusses seien alles konstante Positive werte.



An einem beliebigen Zeitpunkt t sei der Ort des Hundes gegeben durch

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Annahme: Die konstante Geschwindigkeit (betragsmäss ig) $|\dot{\vec{r}}| = v_0$ sei relativ zum Wasser gemeint! Dann ist diese gegeben durch

$$\dot{\vec{r}} = -v_0 \cdot \left(\frac{x}{R} \cdot \vec{e}_x + \frac{y}{R} \cdot \vec{e}_y\right) + \vec{c},\ R := \sqrt{x^2+y^2} > 0,\ \vec{c} = c \cdot \vec{e}_y$$

wobei R der Abstand zum Koordinatenursprung und $\vec{c}$ die Strömungsgeschwindigkeit sind. Demzufolge gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{-yv_0}{R} + c}{\frac{-xv_0}{R}} = \frac{yv_0 - cR}{xv_0} = \frac{yv_0 - c\sqrt{x^2+y^2}}{xv_0} = \frac{y}{x} - \alpha\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}},\ x > 0,\ \alpha := \frac{c}{v_0}$$

$$Sub: u := \frac{y}{x} > 0 \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = y' = xu' + u = u - \alpha\sqrt{1+u^2} \ \Rightarrow\ u' = \frac{-\alpha}{x}\sqrt{1+u^2}$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\alpha \cdot \int \frac{dx}{x} = -\alpha \ln x + C,\ x > 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Ae^{-\alpha \ln x} = Ax^{-\alpha},\ A > 0 \ \Rightarrow\ y^2 + x^2 = \left(Ax^\beta - y\right)^2 = A^2x^{2\beta} + y^2 - 2yAx^\beta,\ \beta := 1-\alpha$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \frac{A^2x^{2\beta} - x^2}{2Ax^\beta},\ y(a) = 0 \ \Rightarrow\ A = \sqrt{\frac{a^2}{a^{2\beta}}} = a^\alpha \ \Rightarrow\ y(x) = \frac{a^{2\alpha}x^{2\beta} - x^2}{2a^\alpha x^\beta} = \frac{a^\alpha x^{1-\alpha}}{2} - \frac{x^{1+\alpha}}{2a^\alpha},\ x \in (0,a]$$

Man sieht dass für $\alpha < 1$ bzw. $c < v_0$ der Hund immer seinen Herren erreicht da

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$$

Für $c = v_0$ schwimmt der Hund im Abstand $a/2$ vom Herren an das Ufer!

Bemerkenswert ist dass für $\alpha > 1$ also $c > v_0$ der Hund ins unendliche schwimmt ($y(x) \overset{x\to 0^+}{\to} \infty$), da er ja kurz vor dem Ufer praktisch nur noch parallel zum Ufer zu schwimmen versucht jedoch immer weiter weg getrieben wird! Die benötigte Zeit um ans Ufer zu gelangen wäre in diesem Fall trivialerweise ∞. Wir wollen jedoch den Fall $c \leq v_0$ also $\alpha \leq 1$ betrachten. Es gilt:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{-v_0 x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-v_0}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{-v_0}{\sqrt{1+\frac{a^{2\alpha}x^{2-2\alpha}}{4x^2} + \frac{x^{2+2\alpha}}{4a^{2\alpha}x^2} - \frac{x^2}{2x^2}}} = \frac{-2v_0a^\alpha x^\alpha}{\sqrt{x^{4\alpha} + a^{4\alpha} + 2a^{2\alpha}x^{2\alpha}}} = \frac{-2v_0a^\alpha x^\alpha}{(x^{2\alpha} + a^{2\alpha})}$$

$$\Rightarrow\ \int_0^a \frac{\left(x^{2\alpha} + a^{2\alpha}\right)}{x^\alpha} dx = 2v_0a^\alpha \int_0^T dt = 2v_0a^\alpha \cdot T$$

$$Für\ \alpha < 1: T = \frac{1}{2v_0a^\alpha} \cdot \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^{2\alpha}x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^a = \frac{a}{v_0(1+\alpha)(1-\alpha)}$$

$$Für\ \alpha = 1: T = \left[\frac{x^2}{2} + a^2 \ln x\right]_0^a = +\infty \quad \square$$