Sommersemester 2007

2. Übungsserie zur Vorlesung - Lösungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. a) $y(x) = ce^{-2x} \qquad c \in \mathbb{R}$

   Anfangswertproblem stets lokal und global eindeutig lösbar.

   b) $y(x) = \dfrac{(c - x^2)^2}{16} \quad 0 \le x^2 \le c \ , \ \ y(x) = -\dfrac{(c + x^2)^2}{16} \quad 0 \le x^2 < -c \, , \quad y(x) \equiv 0$

   Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0 \neq 0$ ist dann lokal, aber nicht global eindeutig lösbar, für $y(x_0) = 0$ auch nicht lokal eindeutig lösbar.

   c) $y(x) = (\sin x + c)^3 \ , \quad y(x) \equiv 0$

   Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0 \neq 0$ ist dann lokal, aber nicht global eindeutig lösbar, für $y(x_0) = 0$ auch nicht lokal eindeutig lösbar.

2. a) $y(x) = \tan(x + c) - x$ b) $y(x) = x + 2 + \dfrac{2}{c\, e^{2x} + 1}$ und $y(x) = x + 2$

   c) $y(x) = (x + 1) + \sqrt{4x + c}$ oder $y(x) = (x + 1) - \sqrt{4x + c}$
   (in Abhängigkeit von den Anfangswerten)

   In allen Fällen ist $c \in \mathbb{R}$ frei wählbar und hängt das Definitionsgebiet der Lösungen von der Wahl der Konstanten c ab.

3. a) $y(x) = x - \dfrac{2x}{\ln|x| + 2c}$ und $y(x) = x$

   b) $y(x) = \sinh(\ln|x| + c) = \dfrac{d^2x^2 - 1}{2d\,x} \qquad d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   c) $[y(x)]^2 = x^2(\ln x^2 + c)$

   In allen Fällen ist $c \in \mathbb{R}$ frei wählbar und hängt das Definitionsgebiet der Lösungen wieder von der Wahl der Konstanten c ab.

4. a) $y(x) = x \arcsin x \qquad 0 < x < 1$

   b) $y(x) = \dfrac{6x}{x^3 + 2} - x \qquad 0 < x < \infty$

   c) $0 = \ln y + \dfrac{x}{y} - 2$ bestimmt die Lösung implizit, beziehungsweise man löst nach der Umkehrfunktion auf und erhält $x(y) = y(2 - \ln y)$.

5. a) $y(x) = \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{3}{2}) \ln(3 - 2x) - \dfrac{5}{4} \qquad x < 3/2$

   b) $y(x) = x + 4 - \sqrt{2(x + 1)^2 - 4} \qquad x > \sqrt{2} - 1$

   c) $y(x) = -1 - (x + 2) \ln(e^{-1/2} + \ln(\dfrac{x + 2}{2})) \qquad x > \dfrac{2}{e^{e^{-1/2}}} - 2$

6. Die Position des Herrn sei $(0, 0)$, die Startposition des Hundes sei $(a, 0)$ und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers $\vec{w} = (0, c)$.

$$y(x) = x \sinh\left(\frac{c}{v} \ln \frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(a^{\frac{c}{v}} x^{1-\frac{c}{v}} - a^{-\frac{c}{v}} x^{1+\frac{c}{v}}\right) \qquad 0 < x \le a$$

   Das gestellte Problem besitzt eine Lösung nur wenn $0 \le c < v$ gilt. In diesem Fall beträgt die vom Hund benötigte Zeit, um zu seinem Herrn zu gelangen $T = \dfrac{av}{v^2 - c^2}$.