

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

FSU Jena - SS 2008

Klausur

Dozent: Prof. Bernd Carl

29. Juli, 2008

---

## Aufgabe 01

- Was versteht man unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung? (3 P.)
- Was ist eine Fundamentalmatrix und wie unterscheiden sich zwei Fundamentalmatrizen? (3 P.)
- Welche Gestalt hat die allgemeine Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung? (3 P.)

## Aufgabe 02

Beweisen Sie folgende Aussage:

Sei  $A$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ .

Sind  $u_1, \dots, u_N \in \ker(B^d)$  wobei  $B := A - \lambda \text{Id}$  ist, linear unabhängige Vektoren, dann sind die Funktionen

$$\varphi_j(x) = \left( u_j + xBu_j + \frac{x^2}{2!}B^2u_j + \dots + \frac{x^{d-1}}{(d-1)!}B^{d-1}u_j \right) e^{\lambda x}, \quad j = 1, \dots, N$$

linear unabhängige Lösungen des linearen, homogenen Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ . (5 P.)

## Aufgabe 03

- Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} y' = 0$$

an. (4 P.)

- Lösen Sie für obige Differentialgleichung das Anfangswertproblem  $y(0) = 1$ . (2 P.)

## Aufgabe 04

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen 2. Ordnung.

- $y'' - 4y' + 4y = 0$  (3 P.)
- $y'' + y = x$  (4 P.)

### Aufgabe 05

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x + y) + (x - y)y' = 0$$

an. (3 P.)

### Aufgabe 06

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 + 1 \\y_2' &= -y_1 - y_2\end{aligned}$$

(5 P.)