

Gewöhnliche Differentialgleichungen  
FSU Jena - SS 2007  
- Klausur -

Dozent: Prof. Dr. H.G. Leopold

30 Juli, 2007

---

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$2x^2yy' + y^2 = 0, \quad y(1) = 2$$

Lösung:

$$y = -\frac{2}{\sqrt{e}} \cdot e^{\frac{1}{2x}}$$

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$y' = 2 \cos^2(y - 2x), \quad y(\pi) = 5\pi$$

Lösung:

$$y = 2x + 3\pi$$

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$y + \sqrt{yx} = xy', \quad y(1) = 1$$

Lösung:

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln x + 1\right)^2 \cdot x$$

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$x(y' - y) = (1 + x^2)e^x, \quad y(1) = e$$

Lösung:

$$y = \left(\ln|x| + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$$

5. Finden Sie einen Integrierenden Faktor und geben Sie die explizite Lösung des Anfangswertproblems an:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0, \quad y(1) = 2$$

Lösung: Integrierender Faktor  $M = x$ .

$$\rightsquigarrow x^3y + \frac{x^2y^2}{2} - 4 = 0 \rightarrow y = \frac{\sqrt{x^4 + 8} - x^2}{x}$$

6. Finden Sie den Fixpunkt der Integralgleichung

$$y(x) = 2 - \int_0^x (y(t))^2 \sin t \, dt \quad C[-1, 1]$$

Lösung: Umformung in ein Anfangswertproblem:

$$y' = -y^2 \sin x, \quad y(0) = 2$$

Lösung des AWP:

$$y = \frac{2}{3 - 2 \cos x}$$

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = 10x^2 + 12x + 6$$

Lösung:

$$y = e^x \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2x^2 + 4x + 2$$

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad y_1(x) = e^{2x} \text{ ist Lösung}$$

Lösung:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}(3x+1)$$

9. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden DGL

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$$

Lösung:

$$\lambda = (k\pi)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y = C \sin(k\pi \ln x)$$

10. Lösen Sie das AWP:

$$y'' = (y')^2 \tan y, \quad y(1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lösung:

$$y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$