Funktionentheorie

FSU Jena - SS 08

Aufgabensammlung

Prof. Weber

4. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

0.1 Aufgabe 01 . . . 3
0.2 Aufgabe 02 . . . 3
0.3 Aufgabe 03 . . . 3
0.4 Aufgabe 04 . . . 3
0.5 Aufgabe 05 . . . 3
0.6 Aufgabe 06 . . . 3
0.7 Aufgabe 07 . . . 4
0.8 Aufgabe 08 . . . 4
0.9 Aufgabe 09 . . . 4
0.10 Aufgabe 10 . . . 4
0.11 Aufgabe 11 . . . 4
0.12 Aufgabe 12 . . . 4
0.13 Aufgabe 13 . . . 4
0.14 Aufgabe 14 . . . 5
0.15 Aufgabe 15 . . . 5
0.16 Aufgabe 16 . . . 5
0.17 Aufgabe 17 . . . 5
0.18 Aufgabe 18 . . . 5
0.19 Aufgabe 19 . . . 5
0.20 Aufgabe 20 . . . 5
0.21 Aufgabe 21 . . . 5
0.22 Aufgabe 22 . . . 6
0.23 Aufgabe 23 . . . 6
0.24 Aufgabe 24 . . . 6
0.25 Aufgabe 25 . . . 6
0.26 Aufgabe 26 . . . 6
0.27 Aufgabe 27 . . . 6
0.28 Aufgabe 28 . . . 7
0.29 Aufgabe 29 . . . 7
0.30 Aufgabe 30 . . . 7
0.31 Aufgabe 31 . . . 7
0.32 Aufgabe 32 . . . 7
0.33 Aufgabe 33 . . . 8
0.34 Aufgabe 34 . . . 8
0.35 Aufgabe 35 . . . 8
0.36 Aufgabe 36 . . . 8
0.37 Aufgabe 37 . . . 8
0.38 Aufgabe 38 . . . 9
0.39 Aufgabe 39 . . . 9
0.40 Aufgabe 40 . . . 9

0.41 Aufgabe 41 9
0.42 Aufgabe 42 9
0.43 Aufgabe 43 9
0.44 Aufgabe 44 10
0.45 Aufgabe 45 10
0.46 Aufgabe 46 10
0.47 Aufgabe 47 10
0.48 Aufgabe 48 10
0.49 Aufgabe 49 10
0.50 Aufgabe 50 11
0.51 Aufgabe 51 11
0.52 Aufgabe 52 11
0.53 Aufgabe 53 11
0.54 Aufgabe 54 11
0.55 Aufgabe 55 12
0.56 Aufgabe 56 12
0.57 Aufgabe 57 12
0.58 Aufgabe 58 13
0.59 Aufgabe 59 13

0.1 Aufgabe 01

Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene?

a) $|z+3| \leq 2$

b) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$ wobei $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ fest sind.

0.2 Aufgabe 02

Bestimme den Real und Imaginärteil von:

a) $(4+8i)(3-2i)^2$

b) $\frac{4+8i}{(3+2i)^2}$

c) $\left|\frac{17-i}{1+i}\right|$

0.3 Aufgabe 03

Man stelle die folgenden Zahlen in trigonometrischer Form dar:

a) $1+i$

b) $1+i\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}-i$

0.4 Aufgabe 04

Man berechne:

a) $\sqrt{-7+24i}$

b) $\sqrt[3]{i}$

c) $\sqrt[3]{-1+i}$

d) $\sqrt[6]{-64}$

0.5 Aufgabe 05

Man löse die quadratische Gleichung

$$z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$$

0.6 Aufgabe 06

Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $0 < \Re(iz) < 1$

b) $|z-2| + |z+2| = 5$

c) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$

0.7 Aufgabe 07

Es sei $z = -1 + i$ und $\zeta = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Man berechne

$$z + \zeta,\ z\zeta,\ z^{-1},\ \zeta^{-1},\ \frac{z}{\zeta},\ \frac{\zeta}{z}$$

stelle das Ergebnis in der Form $x + iy$ und $re^{i\varphi}$ dar und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

0.8 Aufgabe 08

Sei $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Man berechne

$$\left(aw + bw^2\right) \cdot \left(aw^2 + bw\right)$$

0.9 Aufgabe 09

Man drücke folgende Funktionen durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\sin 3\varphi$

0.10 Aufgabe 10

Zu gegebenem u bestimme man v, so dass $w = u + iv$ holomorph ist und die angegebene Anfangsbedingung erfüllt:

a) $u = x^2 - y^2 + xy\ ,\ w(0) = 0$

b) $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\ ,\ w(0) = 0$

0.11 Aufgabe 11

Sei $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Man berechne (vereinfache):

$$(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw)$$

0.12 Aufgabe 12

Man drücke die Funktionen durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus:

a) $\sin n\varphi$

b) $\cos n\varphi$

wobei $n \in \mathbb{N}\ ,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

0.13 Aufgabe 13

Man drücke $\cos^3\varphi$ durch Funktionen von Vielfachen des Winkels φ aus.

0.14 Aufgabe 14

Man beweise ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$$

0.15 Aufgabe 15

Man drücke $\cos^4 x$ und $\sin^4 x$ durch Linearkombinationen von $\cos kx$ und $\sin kx$ aus ($k \in \mathbb{N}$).

0.16 Aufgabe 16

Zu gegebenem u oder v bestimme man v bzw. u, so dass $w = u + iv$ holomorph ist und die angegebene Anfangsbedingung erfüllt:

a) $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}\ ,\ w(2) = 0$

b) $u = e^x\,(x\cos y - y\sin y)\ ,\ w(0) = 0$

0.17 Aufgabe 17

Drei aufeinanderfolgende Ecken eines Parallelogramms mögen in den Punkten z_1, z_2, z_3 liegen. Man bestimme die Lage der vierten Ecke.

0.18 Aufgabe 18

z_0 und z_1 seien zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Wo liegt die folgende Ecke?

0.19 Aufgabe 19

Einen Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $c = a + ib$ sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Eine der Ecken liege im Punkt $z_0 = a + (b+R)i$. Wo liegen die übrigen Ecken?

0.20 Aufgabe 20

Man stelle die Zahlen in trigonometrischer Form dar:

a) $z = 1 + i\tan\alpha \quad (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$

b) $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$

0.21 Aufgabe 21

Berechnen Sie (alle Zweige):

a) $\log(-e)$

b) $\ln(-2)$

c) 2^i

d) $\log i$

0.22 Aufgabe 22

Berechnen Sie (alle Zweige)

a) $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) $\log (x+iy)$

c) $e^{\pi i}$

d) i^i

e) $\sin(x+iy)$

0.23 Aufgabe 23

Man stelle

$$z = 1 + \sin\alpha - i\cos\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

in trigonometrischer Form dar.

0.24 Aufgabe 24

Man bestimme die Wurzeln (Lösungen) $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(x+i)^n + (x-i)^n = 0$$

0.25 Aufgabe 25

Man bestimme

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$

b) $\tan \frac{\pi i}{2}$

c) $\cos(x+iy)$

d) $\arctan xi$

0.26 Aufgabe 26

Man bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

0.27 Aufgabe 27

Berechnen Sie $\int\limits_{\gamma} |z| \; dz$, wobei γ geradlinig oder auf ∂E (E Einheitskreis $|z| < 1$) von $-i$ nach i läuft.

0.28 Aufgabe 28

Man berechne mit der Cauchy-Integralformel

a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$

b) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$

c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1}$

0.29 Aufgabe 29

Man berechne

a) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} |z|^2\, dz$ wobei $\gamma : z(t) = a\cos t + ib\sin t,\ t \in [0, 2\pi],\ a, b > 0$ die Ellipse, mit den Halbachsen a, b in positiver Richtung durchläuft.

b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} |z|\ |dz|$

c) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{z}{\left(z^2+4\right)^2}\, dz$ wobei $\gamma = \overline{z_1 z_2}$ die Strecke von z_1 nach z_2 sei.

0.30 Aufgabe 30

Mit Hilfe der Cauchy-Formel (für f bzw. $f^{(n)}$) bestimme man

$$\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz$$

0.31 Aufgabe 31

Man berechne

$$\int\limits_{\partial E} z^2 dx + z^{-2} dy$$

wobei E der offene Einheitskreis mit Mittelpunkt 0 ist.

0.32 Aufgabe 32

Mittels Cauchy-Integralformel bestimme man

a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}\, dz$

b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\quad , \ |a| < r < |b|\ , \quad m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

0.33 Aufgabe 33

Man bestimme Real-, Imaginärteil, Betrag und Argument von:

a) $z = \dfrac{1+i}{2-3i}$

b) $z = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}$

c) $z = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

0.34 Aufgabe 34

Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{2^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2+k}{2k^2+1}\right)^k z^k$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n(2n)!}(z+1)^n$

0.35 Aufgabe 35

Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von f um z_0:

a) $f(z) = \dfrac{3z^2+1}{z+1}\ ,\ z_0 = 2,\ z_0 = i$

b) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)^2}\ ,\ z_0 = 0$

0.36 Aufgabe 36

Man bestimme den Konvergenzradius:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + b^n\right) z^n\ ,\ b \in \mathbb{C}$$

0.37 Aufgabe 37

$\sum a_k z^k$ habe den Konvergenzradius ρ. Welchen Konvergenzradius hat

a) $\sum a_k z^{2k}$

b) $\sum a_k^2 z^k$

0.38 Aufgabe 38

Man entwickle in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$:

a) $f(z) = \sin^2 z$

b) $f(z) = \cos\left(z^2 - 1\right)$

0.39 Aufgabe 39

Man bestimme die Art der Singularitäten:

a) $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$

b) $e^{\frac{1}{z}} + \dfrac{1}{z}$

0.40 Aufgabe 40

Man bestimme den Konvergenzradius von:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) z^n$

0.41 Aufgabe 41

$\sum a_k z^k$ habe den Konvergenzradius ρ. Welchen Konvergenzradius hat

a) $\sum a_k^2 z^{2k}$

b) $\sum \dfrac{a_k}{k!} z^k$

?

0.42 Aufgabe 42

Bestimmen Sie die Laurententwicklung um $z_0 = 0$ für alle in Frage kommenden Kreisringe von

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

0.43 Aufgabe 43

Man bestimme die singulären Punkte und die Art der Singularitäten von

a) $\dfrac{z}{z^2 + 1}$

b) $\dfrac{1}{z - z^3}$

c) $\dfrac{1}{\sin z}$

0.44 Aufgabe 44

Gewinnen sie die Laurentreihe für

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} \quad , \quad 1 < |z| < 2$

b) $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$

0.45 Aufgabe 45

Man beweise:

a) Eine isolierte Singularität z_0 von f ist Pol m-ter Ordnung $\Leftrightarrow$

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

existiert und ist ungleich Null.

b) g sei holomorph in einer Umgebung von z_0, und z_0 sei Nullstelle m-ter Ordnung von $g \Rightarrow$ $\dfrac{1}{g}$ hat in z_0 einen Pol m-ter Ordnung.

c) Für eine ganz-transzendente Funktion f gilt:

(i) $\forall\ a \in \mathbb{C} : \exists\ (z_n) : |z_n| \to \infty \ \wedge \ f(z_n) \to a$

(ii) $\exists\ (z_n) : |z_n| \to \infty \ \wedge \ |f(z_n)| \to \infty$

0.46 Aufgabe 46

Man bestimme die Laurententwicklung für

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2} \quad , \quad 1 < |z| < 2$$

0.47 Aufgabe 47

Beweisen sie Satz 1 (Abschnitt 7 : Residuenkalkül) (Rechenregeln für Residuen).

0.48 Aufgabe 48

Leiten Sie für $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ die Laurentreihendarstellung her:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z^{-n} + z^n\right) \quad , \quad (z \neq 0)$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+j)!j!} \ , \ n \geq 1 \ , \ c_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2}$$

0.49 Aufgabe 49

Man bestimme die Art der Singularität, Residuen und Hauptteil:

$$f(z) = (z+2) \sin \frac{1}{z+2}$$

0.50 Aufgabe 50

Man zeige:

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \pi\sqrt{2}$

b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5} dx = \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{5}-1\right)$

0.51 Aufgabe 51

Man bestimme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

0.52 Aufgabe 52

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth \pi a - \frac{1}{2a^2} \quad (a>0)$$

0.53 Aufgabe 53

Bestimmen Sie

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

a) Indem Sie zunächst eine Stammfunktion berechnen.

b) Mittels Residuentheorie.

0.54 Aufgabe 54

Man berechne

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2} dx$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \frac{\pi}{12}$

Hinweis zu (c): Substituiere $z = e^{it}$ und zeige $dz = ie^{it}dt$. Dann ergibt sich

$$\cos t = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\ ,\ \cos 3t = \ldots \ \rightarrow \int\limits_{0}^{2\pi} \cdots = \int\limits_{\partial E} \ldots$$

mit

$$\partial E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} : \text{positiv orientiert}$$

0.55 Aufgabe 55

Man zeige

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi a}{b}}$$

wobei $b \neq 0$ und $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$ sei.

0.56 Aufgabe 56

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}\ ,\ a > 0$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ ,\ a > 1$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}\ ,\ a > |b| \quad (\text{oder erst einmal für } a = 2,\ b = 1)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sinh 2\pi} - \frac{1}{8}$

Hinweis:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n) = -\sum \operatorname{Res} \frac{\pi}{\sin \pi z}\,[f(z)]$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum \operatorname{Res} \pi \cot \pi z\,[f(z)]$$

wobei $\sum \operatorname{Res} \varphi(z)\,[f(z)]$: Summe der Residuen von $\varphi(z)f(z)$ bzgl. der Pole von $f(z)$, und $f(z)$ meromorph.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)(n^2+4)}$

0.57 Aufgabe 57

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t\ dt}{1-2p\cos 2t+p^2} = \frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}\ ,\ |p| < 1$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi\ d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = \pi\frac{1+p^4}{1-p^2}\ ,\ |p| < 1$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}\coth \pi a + \frac{\pi^2}{4a^2}\frac{1}{\sinh^2 \pi a} - \frac{1}{2a^4}\ ,\ a > 0$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+1}=\frac{\pi}{2}\Re\left(z_0\cot\pi z_0\right)-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}\pi+\sinh\sqrt{2}\pi}{\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sinh^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{\sinh\sqrt{2}\pi+\sin\pi\sqrt{2}}{\cosh\pi\sqrt{2}-\cos\pi\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

0.58 Aufgabe 58

Man berechne

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sinh\pi a n}=-\frac{1}{2\pi a}-\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sinh\frac{\pi n}{a}}\quad,\ a>0$

b) $\displaystyle\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\cdots=\frac{1}{8\pi}$

0.59 Aufgabe 59

Entwickeln Sie in Laurentreihen

a) $\displaystyle f=\frac{1}{(z^2+1)^n}$ um die Singularitäten von f (jeweils in einer punktierten Kreisscheibe) $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

b) $\displaystyle f=\frac{1}{(z^2+1)^n}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ $z_0=0$ in geeigneten Kreisringen.