Funktionentheorie

FSU Jena - SS 08

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

11. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um Aufzeichnungen des Stoffes der im SS 2008 an der FSU Jena von Prof. Albin Weber im Fach Funktionentheorie gelehrt wurde.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!
Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

Bemerkungen

Danken möchte ich

- Jens Kubieziel
- Philipp Rudolph
- Martin Wünsche

für ihre zahlreichen Korrekturvorschläge.

2 Holomorphe Funktionen

2.1 Allgemeine Begriffe

2.1.1 Definition: Gebiet

Eine offene, zusammenhängende Untermenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *Gebiet* in $\mathbb{C}$.

2.1.2 Definition: Komplexe Funktion

Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \to f(z)$ eine komplexe Funktion, also:

$$x + iy \overset{f}{\mapsto} u(x,y) + iv(x,y) \ , \ u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

2.1.3 Definition: Grenzwert

Der Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|, +)$ ist ein normierter Raum, mit der *Betragsfunktion*

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

U sei eine Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ mit $U \setminus \{a\} \subset D(f)$ bzw. a Häufungspunkt von $D(f)$. Dann schreiben wir $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b :\Leftrightarrow$

$$\forall \ (z_n) \subset U \setminus \{a\} \text{ mit } z_n \to a : \lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$$

Bemerkungen:

a) Es ist $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b$ für einen Häufungspunkt a von $D(f)$, genau dann wenn:

$$\forall \ \varepsilon > 0 : \exists \ \delta > 0 : |f(z) - b| < \varepsilon \text{ für } 0 < |z - a| < \delta$$

b) Ist $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b$, so folgt insbesondere

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} f(a + h) = b \ \wedge \ \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} f(a + ih) = b$$

Die Umkehrung gilt allgemein nicht!

Beispiele:

- Betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \{0, 1\} \subset \mathbb{C} \ , \ f(x) = \begin{cases} 0 & : y = 0 \text{ oder } x = 0 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} f(0 + ih) = 0$$

doch der Grenzwert $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ existiert allgemein nicht!

- Es ist

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

denn

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ \to \ \left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| = \left|\frac{e^z - 1 - z}{z}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \left|z^{k-1}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|z^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k \underset{|z|<1}{=} \frac{|z|}{1 - |z|} \overset{z\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \square$$

2.1.4 Satz über Grenzwerte von Funktionen

Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b$, $\lim\limits_{z\to a} g(z) = c$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = |b|$

b) $\lim\limits_{z\to a} \Re f(z) = \Re b$, $\lim \Im f(z) = \Im b$

c) $\lim\limits_{z\to a} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha b + \beta c$

d) $\lim\limits_{z\to a} f(z) \cdot g(z) = bc$

e) $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{b}{c}$ für $c \neq 0$

Beweis: Für Folgen $w_n = u_n + iv_n,\ t_n \in \mathbb{C}$ und $v_n, u_n \in \mathbb{R}$ gilt zum einen:

$$w_n \to w \ \Leftrightarrow\ u_n \to u \wedge v_n \to v$$

(vgl. Analysis I) und zum anderen

$$w_n \to w\ ,\ t_n \to t \Rightarrow\ w_n t_n \to wt\ ,\ \frac{w_n}{t_n} \to \frac{w}{t} \text{ für } t \neq 0$$

Andere Eigenschaften: allgemein für normierte Räume.

2.1.5 Definition: Stetigkeit

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $a \in \Omega$. f heißt an der Stelle a *stetig* $:\Leftrightarrow \forall\ (z_n) \subset \Omega$ mit $z_n \to a$ gilt: $f(z_n) \to f(a)$.

Bemerkungen:

a) Es gilt auch hier die Äquivalenz zur Definition: f heißt an der Stelle a stetig $:\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 : |f(z) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } |z - a| < \delta\ ,\ z \in \Omega$$

b) Sind f, g in a stetig, so folgt: $\Re f,\ \Im f,\ |f|, \alpha f + \beta g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) sind in a stetig.

c) Ist f in a und g in $f(a)$ stetig, so ist auch $g \circ f$ in a stetig.

2.2 Differenzierung

2.2.1 Definition: Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (offene, zusammenhängende Menge) und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann ist f an der Stelle $a \in \Omega$ *(komplex) differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a) =: \frac{df}{dz}(a) : \text{komplexe Ableitung}$$

Bemerkung: Die komplexe Differenzierung unterscheidet sich grundsätzlich von der Differenzierung im $\mathbb{R}^2$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{|h|}$$

2.2.2 Satz über Kombinationen von differenzierbaren Funktionen

Die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ seien an der Stelle $a \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt:

a) f ist in a stetig.

b) Die Linearkombination $(\alpha f + \beta g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist in a differenzierbar, und es ist $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

c) Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

d) Für $g \neq 0$ ist
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Ist $g : \Omega \to \Omega'$ in a differenzierbar und $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ in $g(a)$ differenzierbar, so ist $f \circ g : \Omega \to \mathbb{C}$ in a differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:
$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Beweis: Analog zum Reellen.

Weitere Regeln zur Differenzierung:

a) $f(z) = c \in \mathbb{C} \;\; \to \;\; f'(z) = 0$

b) $f(z) = z \;\; \to \;\; f'(z) = 1$ das heißt $z' = 1$

c) Für Polynome $f \in \mathbb{C}[X]$, $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k \cdot z^{k-1}$$

d) $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$ für $z \neq 0$. Ferner sogar:
$$\left(z^{-n}\right)' = -nz^{-n-1} \; , \; z \neq 0 \; , \; n \in \mathbb{N}$$

Zusammen mit der vorigen Eigenschaft also für $n \in \mathbb{Z}$: $(z^n)' = nz^{n-1}$

e) $(e^z)' = e^z$

Beweis: Wie im Reellen, z.B
$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{0 \cdot z^n - nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}$$

Bemerke: Im Reellen ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ (im entsprechenden Intervall) allgemein:
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

denn
$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Doch diese Eigenschaft ist im Komplexen allgemein <u>nicht</u> gültig! Denn $\ln x$ hat für $x \in \mathbb{C}$ unendlich viele Werte. Dementsprechend kann x^α nicht mehr als eindeutige Funktion definiert werden!

2.2.3 Definition: Holomorphe Funktion

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω : Gebiet, heißt in Ω *holomorph* $:\Leftrightarrow$ f ist in jeder Stelle von Ω stetig differenzierbar, das heißt $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Bemerkungen:

- Alle Funktionen aus den Ableitungsregeln sind holomorph.
- Im Reellen wird grundsätzlich zwischen differenzierbaren und stetig differenzierbaren Funktionen unterschieden. Zum Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\alpha}{x} & : x \neq 0 \ , \ \alpha > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

  in ganz $\mathbb{R}$ stetig und sogar differenzierbar. Zwar existiert für bestimmte α der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ und es ist sogar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Doch ebenso gibt es $\alpha > 0$ mit $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ das heißt f ist nicht überall stetig differenzierbar.
  Doch: Im $\mathbb{C}$ ergibt sich die Äquivalenz zwischen Differenzierbarkeit und stetiger Differenzierbarkeit, das heißt jede differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist sogar stetig differenzierbar! Somit kann in der Definition für holomorphe Funktionen die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit auch weggelassen werden.

2.2.4 Satz: Kombinationen holomorpher Funktionen

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann sind

$$\alpha f + \beta g \ (\alpha, \beta \in \mathbb{C}), \ \ f \cdot g, \ \ \frac{f}{g} \text{ (außerhalb der Nullstellen von } g\text{)}$$

holomorph.
Beweis: Ableitungsregelen.

2.2.5 Satz über holomorphe Funktionen: die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Die Funktion $f : z = x + iy \mapsto \ u(x,y) + iv(x,y)$ ist in Ω holomorph $\Leftrightarrow$ u, v als reellwertige Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sind stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)}$$

Insbesondere gilt:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beweis: Sei zunächst f holomorph. Also

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right]$$

$$\overset{*}{=} \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

$(*)$ Denn, existiert $\lim(g + ih)$ so existiert auch $\lim g$ und $\lim h$ für g, h reelle Funktionen

Analog:

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)$$

Gleichsetzen und Vergleich von Imaginärteil und Realteil ergibt genau die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (C.R. DGL). Außerdem folgt aus $f' \in \mathcal{C}(\Omega)$ auch

$$u_x, v_x, u_y, v_y \in \mathcal{C}(\Omega) \ \to \ u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

Sei nun $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und die C.R. DGL seien erfüllt. Für

$$z = x + iy,\ h = s + it,\ |s|, |t| << 1$$

folgt

$$f(z+h) = u(x+s, y+t) + iv(x+s, y+t)$$

$$= u(x,y) + D_x u(x,y)s + D_y u(x,y)t + r_1(s,t) + i\left[v(x,y) + D_x v(x,y)s + D_y v(x,y)t + r_2(s,t)\right]$$

$$\text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r_1(s,t)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{r_2(s,t)}{|h|} = 0 \quad \text{(Satz von Taylor)}$$

Setzen jetzt: $r(\underbrace{s+it}_{h}) := r_1(s,t) + ir(s,t)$, woraus, mit Hilfe der C.R. DGL, folgt

$$f(z+h) = f(z) + \left[u_x(x,y) + iv_x(x,y)\right](s+it) + r(h)\ ,\ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

$$\to \quad \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x(x,y) + iv_x(x,y) + \frac{r(h)}{h}$$

$$\to \quad f'(z) = \lim_{h\to 0}\left[u_x(x,y) + iv_x(x,y)\right] + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h}}_{0} = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Bemerkungen:

a) Nicht jedes u bzw. v gehört zu einer holomorphen Funktion $w = u + iv$.

b) Sind u, v 2-mal stetig differenzierbar, so ist

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

und analog

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

(Notwendige Bedingung!).
Tip: Es stellt sich heraus, für holomorphe Funktionen sind $u, v \in \mathcal{C}^2$.

c) Beispiel: $u = x^2$ gehört zu keiner holomorphen Funktion $w = u + iv$ denn $\Delta u = 2 \neq 0$.

2.2.6 Satz über konstante, holomorphe Funktionen

Eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist im Gebiet Ω genau dann konstant, wenn $f'(z) = 0$ in Ω ist.

Beweis:

$$f = u + iv \ \to \ f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0 \ \to \ u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \ \to \ u, v : \text{const}$$

2.3 Komplexe Kurvenintegrale

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ ein stückweise glatter Jordanweg, das heißt $z \in \mathcal{C}^1$ und $z' \neq 0$ auf Teilintervallen und γ *Doppelpunktfrei.*

Bemerkungen:

- Jede positive Umparametrisierung sei ebenfalls mit γ bezeichnet und schließlich sei γ außerdem identifiziert mit der entsprechenden Kurve.
- Also: γ : orientierte Kurve (aus $\mathcal{C}_s^1$, d.h stückweise, stetig differenzierbar).
- $-\gamma$: umgekehrt durchlaufene Kurve (negative Umparametrisierung).
- Sei

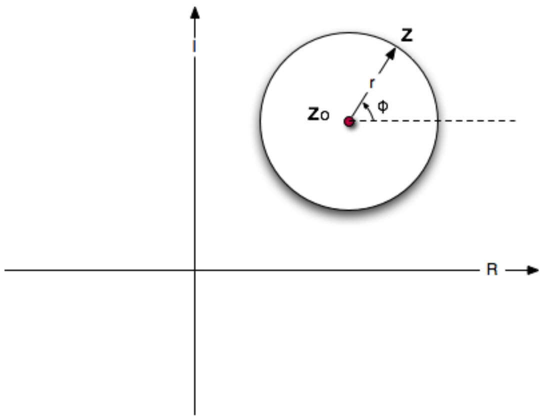
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt = \int_a^b |z'(t)|\ dt \quad , \quad z'(t) := x'(t) + iy'(t) : \text{Tangentialvektor}$$

- Im folgenden: Kurve oder Weg, sei immer positiv orientiert, $\in \mathcal{C}_s^1$.

Beispiel: Die Kurve

$$C_r(z_0) : \ t \mapsto z_0 + re^{it} \ , \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

bezeichnet die positiv orientierte Kreislinie mit Radius r um den Punkt z_0. Dabei wird die Punktmenge z mit $|z - z_0| = r$ in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.



Analog durchläuft $-C_r(z_0)$ die gleiche Punktmenge im Urzeigersinn.

2.3.1 Kettenregel

Sei $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ holomorph und $z : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$$

Beweis: Sei $f = u + iv$ holomorph und $z(t) = x(t) + iy(t)$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = \frac{d}{dt} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] = u_x \cdot x' + \underbrace{u_y}_{-v_x} \cdot y' + i(v_x \cdot x' + \underbrace{v_y}_{u_x} \cdot y')$$

$$= (u_x + iv_x)(x' + iy') = f'(z(t)) \cdot z'(t) \quad \square$$

2.3.2 Definition: Komplexes Integral

Sei $F(t) = U(t) + iV(t), \ U, V \in \mathcal{C}[a, b]$. Dann definiert man

$$\int_a^b F(t)\ dt := \int_a^b U(t)\ dt + i \int_a^b V(t)\ dt$$

2.3.3 Hauptsatz der Integralrechnung

Es sei $F = U + iV,\ U, V \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Dann ist:

$$\int\limits_a^b F'(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

2.3.4 Definition: Komplexes Kurvenintegral

Sei $f \in \mathcal{C}(\Omega),\ \gamma$ eine $\mathcal{C}^1$ Kurve, $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung mit $\gamma = \operatorname{image} z$. Dann ist definiert:

$$\int\limits_\gamma f(z)\ dz := \int\limits_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\ dt$$

Bemerkungen:

- Oberes Integral ist unabhängig von der Parametrisierung, analog zum Reellen.
- Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg (Kurve). Dann sei:

$$\int\limits_\gamma f(z)\ dz := \sum_{i=1}^n \int\limits_{\gamma_i} f(z)\ dz$$

- Linearität:

$$\int\limits_\gamma (af + bg)\ dz = a \int\limits_\gamma f\ dz + b \int\limits_\gamma g\ dz$$

2.3.5 Satz: Integralabschätzung

Ist $|f(z)| \leq M$ auf γ so gilt:

$$\left| \int\limits_\gamma f(z)\ dz \right| \leq M \cdot L(\gamma)$$

Beweis: Sei o.B.d.A γ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve und $F(t) := f(z(t)) \cdot z'(t) = U(t) + iV(t)$. Dann ist:

$$\int\limits_\gamma f(z)\ dz \overset{*}{=} re^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \left| \int\limits_\gamma f(z)\ dz \right| = \left| \int\limits_a^b F(t)\ dt \right| = r = \Re r \overset{*}{=} \Re \left(e^{-i\varphi} \int\limits_a^b F(t)\ dt \right) = \int\limits_a^b \Re \left(e^{-i\varphi} F(t) \right)\ dt$$

$$\leq \int\limits_a^b \left| e^{-i\varphi} F(t) \right|\ dt = \int\limits_a^b |F(t)|\ dt = \int\limits_a^b |f(z(t)) \cdot z'(t)|\ dt \leq \int\limits_a^b M\,|z'(t)|\ dt = M \cdot L(\gamma) \quad \square$$

2.3.6 Zurückführung auf Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^2$

Sei f stetig, γ eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann gilt:

a) $\int\limits_\gamma f(z)\ dz = \int\limits_\gamma (udx - vdy) + i\int\limits_\gamma (vdx + udy) = \int\limits_\gamma g\cdot d(x,y) + i\int\limits_\gamma h\cdot d(x,y)$ mit $g=(u,-v),\ \ h=(v,u)$

b) Ist f holomorph in $\Omega \Rightarrow$ Die Vektorfelder g, h erfüllen die Integrabilitätsbedingung in Ω, das heißt auf sternförmigen (sogar einfach zusammenhängendem) Gebiet Ω gilt: g und h sind Gradientenfelder (es existiert eine Stammfunktion) und es folgt die Wegunabhängigkeit.
Erinerung: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ wenn $F' = \operatorname{grad} F = f$ gilt.

Beweis:

a) Merkregel:

$$\int\limits_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_\gamma (udx - vdy) + i\int\limits_\gamma (vdx+udy)$$

Eigentlicher Beweis:

$$\int\limits_\gamma \underbrace{(u+iv)}_{f}\ dz = \int\limits_a^b [u(\underbrace{x(t),y(t)}_{z(t)}) + iv(x(t),y(t))]\cdot \underbrace{[x'(t)+iy'(t)]}_{z'(t)}\ dt$$

$$= \int\limits_a^b \{u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\cdot y'(t)\}\ dt + i\int\limits_a^b \{u(x(t),y(t))\cdot y'(t) + v(x(t),y(t))\cdot x'(t)\}\ dt$$

$$= \int\limits_a^b \underbrace{u(x(t),y(t))\cdot x'(t)\ dt}_{u\ dx} - \int\limits_a^b \underbrace{v(x(t),y(t))\cdot y'(t)\ dt}_{v\ dy} + i\int\limits_a^b \underbrace{u(x(t),y(t))\cdot y'(t)\ dt}_{u\ dy} + i\int\limits_a^b \underbrace{v(x(t),y(t))\cdot x'(t)\ dt}_{v\ dx}$$

b) Sei f holomorph. Dann ist $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$. Also

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = u_y = -v_x = \frac{\partial g_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = v_y = u_x = \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

Somit erfüllen g, h die Integrabilitätsbedingung von Schwarz (vgl. reelle Analysis).

2.3.7 Folgerung: Grundformeln der Funktionentheorie

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\ ,\quad \int\limits_{C_r(z_0)} (z-z_0)^n dz = 0\ ,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$$

Beweis:

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \underbrace{(z-z_0)^n}_{f(z)} dz \overset{*}{=} \int\limits_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n ire^{it}dt = ir^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt$$

$$= ir^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t]\ dt = \begin{cases} 0 & : n+1 \neq 0 \\ 2\pi i & : n+1 = 0\end{cases}$$

$(*)$: Sub: $z = z_0 + re^{it} \ \rightarrow\ z' = r\left(-\sin t + i\cos t\right) = ir\left(\cos t + i\sin t\right) = ire^{it}$ $\square$

2.3.8 Satz über Stammfunktionen

Sei Ω ein Gebiet, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und jedes Kurvenintegral von f sei wegunabhängig, das heißt

$$\int\limits_\gamma f(z)\ dz$$

hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Sei

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\ dw = \int\limits_\gamma f(w)\ dw\ ,\ \gamma \text{ Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ für festes } z_0$$

Dann ist F holomorph und Stammfunktion von f, das heißt $F' = f$.

Beweis: Sei $F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$. Dann gilt:

$$F = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\ dw = \underbrace{\int\limits_{z_0}^{z} (udx - vdy)}_{U} + i \underbrace{\int\limits_{z_0}^{z} (vdx + udy)}_{V}$$

Da beide rechte Integrale wegunabhängig sind, folgt dass U zu $(u,-v)$, V zu (v,u) Stammfunktionen sind. Also

$$U_x = u\ ,\ U_y = -v\ ,\ V_x = v\ ,\ V_y = u$$

$$\Rightarrow\ U, V \in \mathcal{C}^1\ \wedge\ \text{Cauchy-Riemannsche DGL}$$

$$\Rightarrow\ F \text{ holomorph}\ ,\ F' \overset{(2.2.5)}{=} U_x + iV_x = u + iv = f \qquad \square$$

Folgerung: Sei Ω ein sternförmiges Gebiet (oder einfaches Gebiet, das heißt $\mathcal{C}^2$-diffeomorphes Bild eines sternförmiges Gebietes), f holomorph in Ω. Dann besitzt f eine Stammfunktion F in Ω, und es ist

$$\oint\limits_\gamma f(z)\ dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in Ω.

Beweis: $f = u + iv$ erfüllt die C-R-DGL, das heißt die Vektorfelder $(u,-v)$, (v,u) erfüllen die Integrabilitätsbedingungen. Da Ω sternförmig ist, ist

$$\int\limits_\gamma f(z)\ dz = \int (udx - vdy) + i \int (vdx + udy)$$

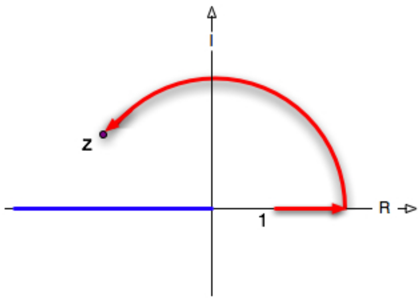
wegunabhängig. Somit existiert eine Stammfunktion F. $\square$

2.3.9 Definition: Komplexer Logarithmus

Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \{z = re^{i\varphi} \mid r > 0,\ -\pi < \varphi < \pi\}$ die *geschlitzte* Ebene (sternförmig), $f(z) = \frac{1}{z}$ in Ω holomorph. Dann existiert nach vorigem Satz eine Stammfunktion F in Ω mit $F(1) = 0$:

$$F(z) = \int\limits_1^z \frac{dz}{z} \overset{r:=|z|}{=} \int\limits_1^r \frac{dz}{z} + \int\limits_r^z \frac{dz}{z} \overset{*}{=} \int\limits_1^r \frac{dt}{t} + \int\limits_0^{\arg(z)} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\ dt = \ln r + i\arg(z) : \text{Stammfunktion zu f}$$

$(*)$: Substitution im 2. Integral: $z(t) := re^{it}$



Somit Definition von ln:

$$\ln z := \int_1^z \frac{dw}{w} = \underbrace{\ln r}_{\text{reeller ln}} + i\varphi \quad \text{für} \quad z = re^{i\varphi} \ , \ r > 0 \ , \ -\pi < \varphi < \pi$$

heißt *Hauptzweig des Logarithmus*, und ist Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$ mit $\ln 1 = 0$.
Bemerke: Es wird oft "log" anstelle von "ln" geschrieben.

Bemerkungen:

a) $e^{\ln z} = z, \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ denn

$$e^{\ln z} = e^{\ln re^{i\varphi}} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi}$$

b) $\ln e^w = w$ für $|\Im w| < \pi$ (folgt aus Definition von ln)

2.3.10 Definition: Zweig des Logarithmus

Sei Ω ein einfaches Gebiet, $0 \notin \Omega$, F holomorph in Ω. F heißt *Zweig des Logarithmus*, wenn gilt:

$$e^{F(z)} = z \ , \ z \in \Omega$$

2.3.11 Satz über Zweige des Logarithmus

Zu jedem einfachen Gebiet Ω mit $0 \notin \Omega$ gibt es unendlich viele Zweige des Logarithmus. Sie unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$.

Erläuterung:

a) Ω geschlossene Ebene. Dann hat

$$F(z) = \ln z$$

die Eigenschaft

$$e^{F(z)} = e^{\ln z} = z$$

das heißt der Hauptzweig ist auch Zweig des Logarithmus.

b) Für

$$F(z) = \ln z + 2k\pi i$$

folgt

$$e^{F(z)} = e^{\ln z + 2k\pi i} = e^{\ln z} \cdot \underbrace{e^{2k\pi i}}_{1} = z$$

das heißt F ist Zweig des Logarithmus in *geschichteter Ebene* (vgl. Riemann-Schichten).

Bemerkung zu den Zweigen der Quadratwurzel: Zu $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gibt es genau zwei holomorphe Funktionen f_1, f_2 mit $f_k^2(z) = z,\ k = 1, 2$:

$$f^2(z) = z \ \rightarrow \ f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln z} \stackrel{*}{=} e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi)} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

$$(*) : \text{Oder} : f(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi + 2\pi i)} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi}$$

Bemerkungen zu eindeutigen bzw. mehrdeutigen Funktionen:

a) Funktionen der Form $z^k (k \in \mathbb{Z}),\ e^z$, trigonometrische und hyperbolische Funktionen $(\sin, \cos, \tan, \cot, \sinh, \dots)$ sind eindeutige Funktionen.

b) $\ln z$, die allgemeine Exponentialfunktion

$$a^z := e^{z \ln a},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

und die allgemeine Potenzfunktion

$$z^\alpha := e^{\ln z^\alpha} = e^{\alpha \ln z},\ \alpha \in \mathbb{C}$$

sind nicht eindeutig, das heißt zu ihnen gehören mehrere Zweige (im allgemeinen unendlich viele). Speziell hat

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} \ ,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

genau n Zweige.

c) Doch für $a = e$ ist (per Konvention)

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eindeutig definiert (Ausnahme). Entsprechend sind dann

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ ,\ \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ,\ \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

eindeutig. Analog definiert man für $k \in \mathbb{Z}$ die eindeutige Potenzfunktion:

$$z^k := \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{k \text{ mal}} \neq e^{k \ln z}$$

2.3.12 Definition: Kompakte Konvergenz

Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, stetige Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen f streben: $f_n \stackrel{\text{gleichmäßig}}{\longrightarrow} f$, sagt man: f_n streben gegen f in Ω im Sinne der *kompakten Konvergenz*.

2.3.13 Satz über kompakte Konvergenz

Seien f_n stetig, die in Ω gegen f im Sinne der kompakten Konvergenz streben. Dann ist f in Ω stetig, und für jeden Weg γ in Ω gilt:

$$\int_\gamma f_n(z)\ dz \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\gamma f(z)\ dz$$

2.4 Analytische Funktionen

2.4.1 Satz über Potenzreihen

Sei

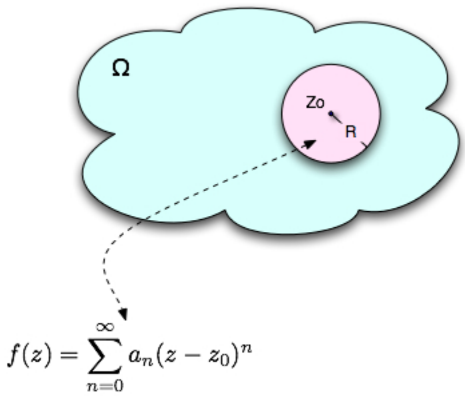
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \;:\; |z - z_0| < R,\; 0 < R \leq \infty$$

Dann ist f beliebig oft differenzierbar, und man erhält die Ableitungen durch gliedweise Differentiation.

2.4.2 Definition: Analytische Funktion

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* $:\Leftrightarrow$

$$\forall\; z_0 \in \Omega : \exists\; R > 0 : f \text{ in } B_R^o(z_0) \text{ als Potenzreihe darstellbar} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$



Bemerkungen:

(i) Ist f analytisch in Ω, so ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und die Potenzreihenkoeffizienten a_n sind eindeutig gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall\; n \in \mathbb{N}_0$$

denn für $|z - z_0| < R$ ist:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \;\to\; f^{(n)}(z_0) = n! a_n$$

(ii) Sind f und g analytisch in Ω, so sind auch $\lambda f + \mu g,\; f \cdot g$ analytisch in Ω, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

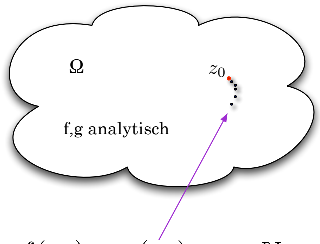
2.4.3 Identitätssatz für analytische Funktionen

Seien f, g analytisch auf dem Gebiet Ω und $f(z_n) = g(z_n)$ für eine bestimmte Folge

$$(z_n) \subset \Omega,\; z_n \to z_0 \in \Omega,\; z_n \neq z_0$$

Dann ist $f \equiv g$.

Erläuterung: Die Übereinstimmung auf einer einzigen, in Ω konvergierenden Folge $z_n \to z_0,\; z_n \neq z_0$ reicht für analytische Funktionen aus, um die vollständige Übereinstimmung auf Ω zu schließen.



$$f(z_n) = g(z_n), \;\; n \in \mathbb{N}$$

Alternative Formulierung: Analog kann man fordern: f und g mögen übereinstimmen auf einer abzählbaren (unendlichen) Punktmenge in Ω, die mindestens einen Häufungspunkt in Ω besitzt. Dann ist $f \equiv g$ in Ω

Beispiele

a) $f(z) = \dfrac{1}{w-z}$ ist analytisch in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{w\}$.
Beweis: Sei $z_0 \in \Omega$: für $|z - z_0| < R := |w - z_0|$ ist:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$(*) : \text{Für } \; |q| < 1 : \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

b) Die Exponentialfunktion e^z ist analytisch in $\mathbb{C}$, denn

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n$$

c) Analog sind auch alle trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen analytisch.

2.4.4 Nullstellen analytischer Funktionen

Sei f auf Ω analytisch und nicht konstant. Dann gilt:

a) Ist $f(z_0) = 0, \;\; z_0 \in \Omega$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung $U(z_0)$ um z_0, so dass:

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \;, \;\; g(z) \neq 0$$

in $U(z_0)$ ist. Diese (eindeutig bestimmte) Zahl k nennt man *Ordnung* der Nullstelle z_0.

b) f hat an der Stelle z_0 Nullstelle k-ter Ordnung $\Leftrightarrow$

$$f(z_0) = f'(z_0) = .. = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \;\; f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

c) Zu jeder kompakten Teilmenge von Ω hat f höchstens endlich viele Nullstellen.

Beweis: Folgt aus den letzten Sätzen.

2.4.5 Cauchyscher Integralsatz für einfache Gebiete

Sei f holomorph in einem sternförmigen (allgemeiner: einfachen) Gebiet Ω, γ ein geschlossener Weg. Dann ist

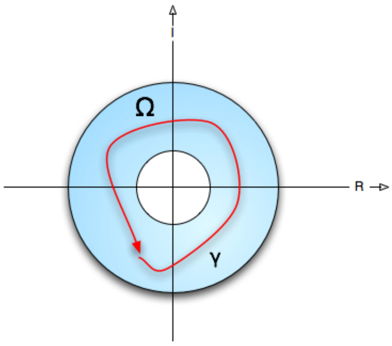
$$\int_\gamma f(z) \; dz = 0 \quad (*)$$

Folgerung 1: Obere Gleichung (*) gilt auch für einfach gelagerten Weg, das heißt $\gamma \in \Omega' \subset \Omega,\ \Omega'$ einfach.

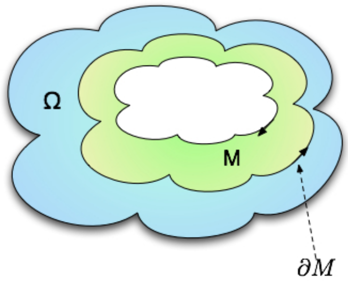
Bemerkungen:

(i) Betrachten den Kreisring: dies ist kein einfaches Gebiet, denn

$$\int\limits_{C_\gamma(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$



(ii) Der Cauchysche Integralsatz gilt auch für holomorphe Funktionen f auf allgemeineren Gebieten Ω, z.B

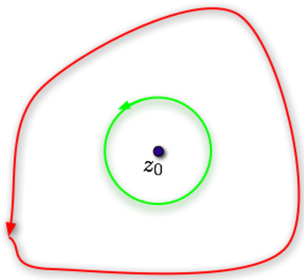


$$\int\limits_{\partial M} f(z)\ dz = 0$$

(iii) Sei f in $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph. Dann ist

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\ dz - \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\ dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\ dz + \int\limits_{-C_r(z_0)} f(z)\ dz = \int\limits_{\partial M} f(z)\ dz = 0$$

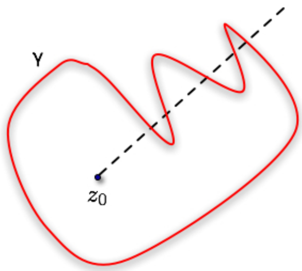
$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z)\ dz = \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\ dz$$



Hierbei: γ umläuft z_0 einfach positiv, das heißt

$$\left\{z_0 + te^{i\varphi} : t \geq 0\right\}$$

trifft $z(t)$ (Parametrisierung von γ) in genau einem Punkt. Im folgenden Bild umläuft zum Beispiel γ den Punkt z_0 <u>nicht</u> einfach.



(iv) Beispiel: Für γ geschlossen um z_0 (analog zu oben)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0}\, dz \overset{(2.3.7)}{=} 2\pi i$$

2.4.6 Homologiesatz

Sei Ω ein Gebiet, f in $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph, γ umlaufe z_0 einfach positiv. Dann ist

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\, dz$$

falls das *Innere* von γ und $C_r(z_0)$ in Ω sind.

2.4.7 Definition: Homologe Wege

Zwei geschlossene Wege γ_1, γ_2 heißen *homolog* $:\Leftrightarrow$

$$\int\limits_{\gamma_1} f\, dz = \int\limits_{\gamma_2} f\, dz \quad \forall\ f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

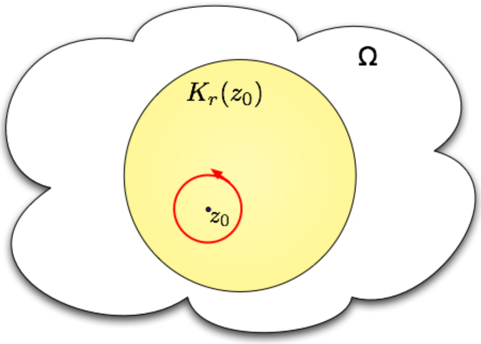
Zum Beispiel waren die im Homologiesatz erwähnten Wege γ und $C_r(z_0)$ homolog in $\Omega \setminus \{z_0\}$.

2.5 Cauchysche Integralformel

2.5.1 Cauchysche Integralformel für Kreise

Sei f holomorph in Ω, und $B_r(z_0) \subset \Omega$ eine abgeschlossene Kugel in Ω. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \quad \forall\ z \in B_\rho(z_0),\ \rho \leq r$$



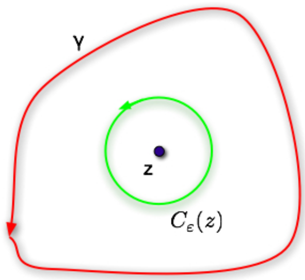
2.5.2 Cauchysche Integralformel für einfach, positiv umlaufende Wege

Es sei γ ein geschlossener Weg, der jeden von ihm umschlossenen Punkt einfach positiv umläuft. γ und sein Inneres sei in Ω enthalten. Ist f in Ω holomorph, so gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall\ z \text{ im Inneren von } \gamma$$

Beweis: Betrachten z im Inneren von γ. Dann $\exists\ \varepsilon > 0$ so dass $C_\varepsilon(z)$ und γ homolog bezüglich $\Omega \setminus \{z\}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z} = f(z)$$



2.5.3 Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Sei f in Ω holomorph. Dann gilt:

a) f ist in Ω analytisch. Somit ist insbesondere $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$

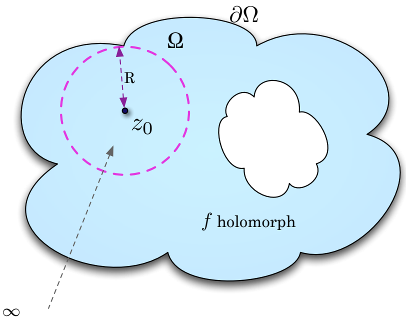
b) Sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung um $z_0 \in \Omega$. Dann ist der Konvergenzradius der Reihe mindestens

$$R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad \forall\ 0 < r < R \quad \text{(Cauchy-Formeln)}$$

Erläuterung: Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um einen Punkt z_0 ist immer mindestens so groß wie der Abstand von z_0 zum Rand $\partial\Omega$.



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Somit ist insbesondere jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ auch analytisch in Ω, das heißt $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Vergleich zum reellen: Im reellen existiert kein analoger Satz, das heißt ist $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$ so ist im allgemeinen nicht $f \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$. Betrachten zum Beispiel

$$f(z) = \begin{cases} x^2 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

stetig, also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Doch f'' ist nicht differenzierbar in $x = 0$, das heißt $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Es gibt sogar $\mathcal{C}^\infty$ Funktionen im reellen, die trotzdem nicht analytisch sind. Beispiel (Cauchy):

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

Dann ist zwar $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, aber in $x = 0$ nicht analytisch, sprich in keiner Umgebung $B_\varepsilon^o(0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, denn wäre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

so wäre insbesondere

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

das heißt in einer Umgebung $B_\varepsilon^o(0)$ ist $f(x) \equiv 0$, was ein Widerspruch ist!

2.5.4 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Seien f, g in Ω holomorph und

$$(z_n) \subset \Omega, \; z_n \to z_0 \in \Omega, \; z_n \neq z_0$$

Ist $f(z_n) = g(z_n)$ so folgt $f \equiv g$ in Ω.

Beweis: Da f, g analytisch sind folgt nach Satz 2.4.3 die Behauptung.

Bemerkung: (Fortsetzung reeller analytischer Funktionen)

a) Die einzige holomorphe Fortsetzung von $e^x, \; x \in \mathbb{R}$ ins Komplexe ist

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;, \; z \in \mathbb{C}$$

Erläuterung: Betrachten die holomorphe Funktion

$$f(z) = e^z \;, \; z \in \mathbb{C}$$

Diese stimmt mit e^x für $x \in \mathbb{R}$ überein. Ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ebenfalls holomorph, mit $g(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$, so wählen eine beliebige in $\mathbb{R}$ konvergente Punktfolge $(z_n) \subset \mathbb{R},\ z_n \to z_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $g(z_n) = f(z_n)$, so dass nach obigem Satz gilt: $f(z) = g(z),\ z \in \mathbb{C}$

b) Die eindeutig bestimmten, analytischen Fortsetzungen von sin, cos ins Komplexe sind:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Folgerungen: Eigenschaften von $\sin, \cos$: Es gilt:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für $z \in \mathbb{C}$.
Beweis: Für $z \in \mathbb{R}$ ist bekanntlich $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 =: f(z)$. Nach dem Identitätssatz müssen auch die analytischen Fortsetzungen beider Seiten gleich sein.

b) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Analog zu (a): Identitätssatz.

c) $\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$
Analog zu (a): Für $z \in \mathbb{R},\ |z| < 1$ gilt die Behauptung.

Jedes bekannte Additionstheorem über Winkelfunktionen im Reellen kann auf $\mathbb{C}$ übertragen werden!

2.5.5 Definition: Ganze Funktion

Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganze* Funktion. Insbesondere gilt für ganze Funktionen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ ,\ z \in \mathbb{C} \quad \to \text{ Konvergenzradius: } R = \infty$$

Beispiel: Polynome, e^z, $\sin, \cos$ sind alles ganze Funktionen.

2.5.6 Satz über Potenzreihen

Es sei

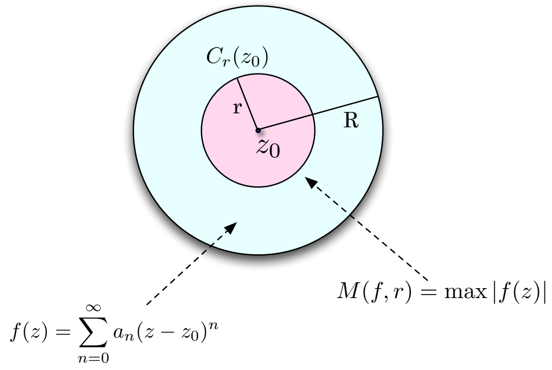
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für} \quad |z - z_0| < R$$

Sei außerdem

$$M(f, r) := \max \{|f(z)| : |z - z_0| = r\} \quad \text{für} \quad 0 < r < R$$

Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \ ,\ n \in \mathbb{N}_0$$



Beweis: Durch die Cauchy Integralformel folgt sofort:

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \overset{(2.3.5)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M(f,r)}{r^{n+1}} \quad \square$$

2.5.7 Satz von Liouville

Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant. Somit gilt insbesondere: Jede ganze, nicht-konstante Funktion ist nicht beschränkt.
Beispiel: $\sin, \cos$ sind nicht beschränkt.

Beweis: Sei f eine ganze Funktion, dann ist sie entwickelbar gemäß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \ z \in \mathbb{C}$$

mit dem Konvergenzradius $R = \infty$. Sei f beschränkt, das heißt $|f(z)| \leq M$. Dann ist

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall\, r > 0$$

Lassen wir $r \to \infty$ gehen, so muss $a_n = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ sein, also $f(z) = a_0 \quad \square$

2.5.8 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $p \in \mathbb{C}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann besitzt p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Daraus folgt insbesondere der Fundamentalsatz der Algebra: p lässt sich als Produkt linearer Faktoren schreiben.

Beweis:

a) Sei $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ mit $a_n \neq 0, \ n \geq 1$. Dann ist:

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{p(z)}{z^n} \right| = |a_n| > 0$$

Somit existiert ein $R > 0$ mit

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \geq \frac{1}{2} |a_n| \quad \text{für } |z| \geq R$$

also

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n| R^n} =: M \quad , \ |z| \geq R \qquad (1)$$

Annahme: $p(z) \neq 0$ auf ganz $\mathbb{C}$. Dann ist $f := \frac{1}{p}$ eine ganze Funktion. Wegen (1) ist f für $|z| \geq R$ beschränkt. Da f stetig auf der kompakten Menge $B_R(0)$ ist f auch für $|z| \leq R$ beschränkt. Somit ist f beschränkt, und nach Satz 2.5.7 konstant. Somit muss jedoch auch p konstant sein, was ein Widerspruch zur Annahme war!

b) **Fall:** $\text{grad}(p) \geq 2$. Sei λ_1 Nullstelle von p. Dann ist $p(z) = (z-\lambda_1) \cdot q(z)$ mit $\text{grad}\, q \geq 1$. Somit hat auch q eine Nullstelle λ_2, usw., also

$$p(z) = a_n(z - \lambda_1) \cdot .. \cdot (z - \lambda_n) \quad \square$$

Bemerkung: Es gilt ferner:

- Ist z Nullstelle eines Polynoms $P \in \mathbb{R}[X]$, so ist auch $\overline{z}$ Nullstelle von P.
- Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $\text{Grad}(P) > 0$, kann man in Produkt linearer und quadratischer Faktoren $g_i \in \mathbb{R}[X]$ zerlegen:

$$P = \prod_{i=1}^{m} g_i \;, \; \text{Grad}(g_i) \in \{1, 2\}$$

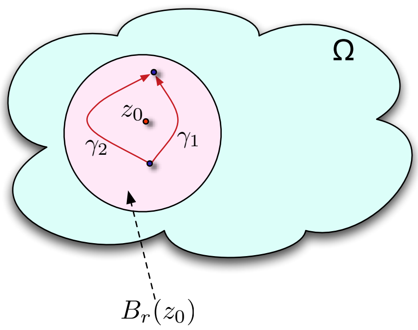
- Die Vielfachheit einer nichtreellen Nullstelle $\alpha + \beta i$ eines Polynoms $P \in \mathbb{R}[X]$ ist gleich der Vielfachheit der konjugierten Nullstelle $\alpha - i\beta$.

2.5.9 Satz von Morera

Sei f in Ω stetig und $\int\limits_{\gamma} f(z)\; dz = 0$ für jeden geschlossenen, einfach gelagerten Weg γ in Ω (das heißt γ befindet sich in einem einfachen Teilgebiet von Ω). Dann ist f holomorph.
Bemerkung: Es genügt sogar dass die Eigenschaft für jeden geschlossen, in einem sternförmigen Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ liegenden Weg gilt.

Beweis: Betrachten eine beliebige Kugel $B_r(z_0) \subset \Omega$. Dann besitzt f eine Stammfunktion F auf $B_r(z_0)$ (vgl. Satz 2.3.8) da jedes Integral $\int\limits_{\gamma} f(z)\; dz$ in $B_r(z_0)$ wegunabhängig ist:

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\; dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\; dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\; dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)\; dz = 0$$



Da F holomorph ist, folgt $f = F'$ holomorph auf $B_r(z_0)$. Da Ω offen ist, existiert um jeden Punkt z_0 solch eine Kugel, das heißt f ist holomorph in Ω. $\quad\square$

2.5.10 Satz über Vertauschung von Differentiation und Grenzübergang

Es seien f_n in Ω holomorph und kompakt konvergent gegen f (das heißt $f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig auf jede kompakte Teilmenge von Ω). Dann ist f holomorph in Ω. Ferner gilt im Sinne der kompakten Konvergenz:

$$f_n^{(k)}(z) \to f^{(k)}(z) \;, \; k \in \mathbb{N}$$

Bemerkung: Im reellen existiert **keine** analoge Aussage!
Folgerung: Eine kompakt konvergente Reihe aus holomorphen Funktionen ist beliebig oft gliedweise differenzierbar.

2.5.11 Zusammenfassung der Hauptsätze

Für stetige Funktion f auf Ω sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist holomorph in Ω

b) f ist analytisch in Ω

c) $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ wobei $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-Funktionen sind, mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

d) $\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 0$ für jeden geschlossenen, einfach gelagerten Weg γ in Ω.

3 Laurent-Entwicklungen

3.1 Singularitäten

3.1.1 Definition: Isolierte Singularität

Es sei f holomorph mit $D(f) = \Omega \setminus \{z_0\}$. Dann heißt $z_0 \in \Omega$ isolierte Singularität von f.
z_0 heißt *hebbare* Singularität genau dann wenn eine holomorphe Funktion g in einer Kugel $B_\varepsilon(z_0)$ existiert, mit

$$f(z) = g(z) \quad \text{in} \quad B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$$

z_0 heißt *Polstelle* falls gilt:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

z_0 heißt *wesentliche Singularität* falls sie weder Polstelle noch eine hebbare Singularität ist.

Beispiel 1:

a) Für

$$f(z) := \frac{\sin z}{z}$$

ist $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität, denn: Für $z \neq 0$ ist

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots =: g(z)$$

wobei $g(z)$ eine überall konvergente Reihe ist, das heißt g ist ganz. Weiter ist

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & : z \neq 0 \\ 1 & : z = 0 \end{cases}$$

b) Für

$$f(z) := \frac{z^3 - 1}{z - 1}$$

ist $z_0 = 1$ eine hebbare Singularität.

c) Die Funktion

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{z}$$

hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität.

d) Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

besitzt in $z_0 = 0$ eine Polstelle.

e) Die Funktion

$$f(z) := e^{\frac{1}{z}}, \; z \neq 0$$

besitzt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.
Beweis: z_0 ist keine hebbare Singularität, denn

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} e^n = \infty$$

Würde es eine Funktion g um z_0 mit $g(z) = f(z)$ gäben, so müsse $g(z) \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} \infty$ gehen, das heißt g wäre in z_0 nicht stetig. Andererseits ist z_0 auch keine Polstelle, denn

$$\lim_{n \to \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = e^{-n} = 0 \neq \infty$$

Somit ist z_0 eine wesentliche Singularität.
Betrachten ferner

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2\pi i n}\right) = \lim_{n \to \infty} e^{2\pi i n} = 1$$

das heißt der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existiert nicht mal.

Beispiel 2: Betrachten die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{w-z}$$

a) Es ist

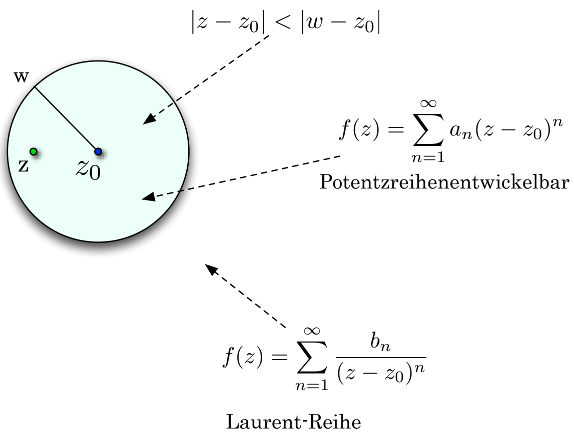
$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n : \text{konvergent für } |z-z_0| < |w-z_0|$$

Es liegt sogar gleichmäßige Konvergenz für $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| \leq \rho < 1$ vor, und somit kompakte Konvergenz.

b) Für $|z-z_0| > |w-z_0|$ erhält man nach Vertauschen von w und z in (a):

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \underbrace{(w-z_0)^{n-1}}_{=:-b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

wobei für $1 < r \leq \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|$ sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt.



3.1.2 Definition: Laurent-Reihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

heißt *Laurent-Reihe*. Sie heißt *konvergent* an der Stelle $z :\Leftrightarrow$

$$r(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{und} \quad h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

sind konvergent. Dann ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n := h(z) + r(z)$$

wobei $h(z)$ *singulärer* oder *Hauptteil* und $r(z)$ *regulärer* oder *Nebenteil* heißt.

3.1.3 Satz über den singulären Teil der Laurent-Reihe

Betrachten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Dann gilt:

a) Ist die Reihe konvergent für $z = z_1$, so ist sie absolut konvergent $\forall\ z : |z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

b) Ist die Reihe divergent in $z = z_2$, so ist sie divergent $\forall\ z : |z - z_0| < |z_2 - z_0|$.

Beweis: Setzen $w = \dfrac{1}{z - z_0}$ also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

a) Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z_1-z_0)^n}}_{w_1^n}$$

konvergent, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^n}}_{w^n}$$

absolut konvergent für $|w| < |w_1|$.

b) Ist anderseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \underbrace{\frac{1}{(z_1-z_0)^n}}_{w_1^n}$$

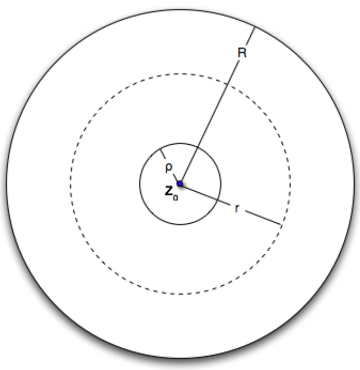
divergent, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^n}}_{w^n}$$

divergent für $|w| > |w_1|$.

Folgerung: Ist der Hauptteil einer Laurent-Reihe konvergent für z_1, der reguläre Teil konvergent für z_2, so ist die Laurent-Reihe konvergent im Ring-Gebiet

$$\rho := |z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0| =: R$$



3.1.4 Satz: Gleichmäßige Konvergenz der Laurent-Reihe

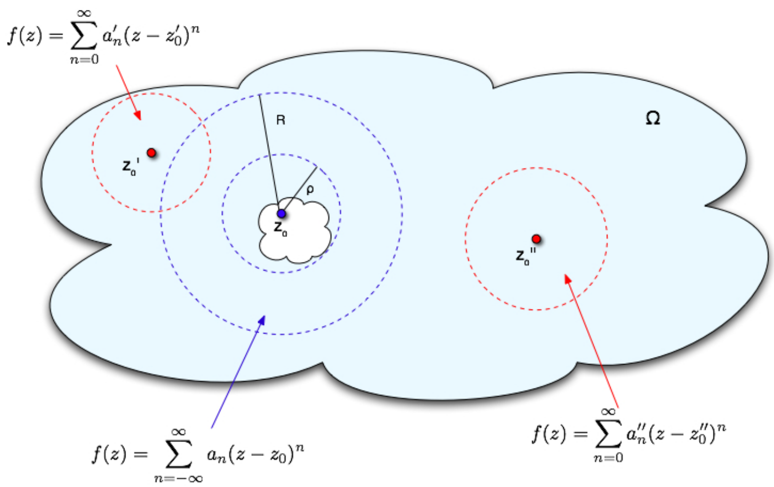
Ist
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =: f(z)$$
konvergent für $\rho := |z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0| =: R$ mit $0 \leq \rho < R \leq \infty$, so ist sie gleichmäßig konvergent für $\rho + \varepsilon \leq |z - z_0| \leq r,\ \varepsilon > 0,\ r < R$ (kompakter Kreisring). Insbesondere ist dann f in diesem Kreisring holomorph. Dabei gilt:
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \quad , \quad \rho < r < R$$

3.1.5 Identitätssatz für Laurent-Reihen

Sei $\rho := |z_1 - z_0|\,,\ R := |z_2 - z_0|$. Gilt
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \quad \text{für} \quad \rho < |z-z_0| < R$$
so sind $a_n = b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Beweis: Folgt direkt aus der Formel für die Koeffizienten a_n, b_n.

3.1.6 Satz über die Laurentreihen-Entwickelbarkeit

Sei f holomorph im Ringgebiet $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z - z_0| < R\}$ mit $0 \leq \rho < R \leq \infty$. Dann besitzt f die Reihenentwicklung
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
und ist in jeder kompakten Teilmenge von $\mathcal{G}$ gleichmäßig konvergent. Dabei folgt durch die Cauchy-Integralformel:
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \quad \text{für} \quad \rho < r < R$$
Somit ist f durch ihre Laurent-Reihe dargestellt. Nach Satz 3.1.5 ist diese eindeutig bestimmt.



Bemerke: z_0 muss nicht unbedingt in $\mathcal{G}$ sein.

Beispiel:
$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \dots \quad \text{für} \quad 0 < |z| < \pi$$

3.1.7 Satz über die Abschätzung der Koeffizienten einer Laurent-Reihe

Die Funktion f besitze die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und es sei

$$M(f, r) := \max\{f(z) : |z - z_0| = r\} \quad , \quad \rho < r < R$$

Dann gilt

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

3.1.8 Satz von Riemann

Ist f holomorph und beschränkt für $0 < |z - z_0| < R$, so ist z_0 eine hebbare Singularität.

Beweis: Da f holomorph ist, besitzt sie die Laurent-Reihen-Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Wegen $|f| \leq M$ für ein geeignetes $M > 0$, folgt

$$a_n \leq \frac{M}{r^n} \ , \ 0 < r < R \ \Rightarrow \ |a_{-n}| \leq M r^n \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Lassen wir $r \to 0$ gehen, so geht $a_{-n} \to 0$, das heißt $a_{-n} = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$, bzw.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad 0 < |z - z_0| < R$$

Doch die rechte Seite ist holomorph in $|z - z_0| < R$. $\square$

3.1.9 Charakterisierung von Polstellen

Es sei f holomorph in $0 < |z - z_0| < R$. Dann besitzt f in z_0 eine Polstelle, genau dann wenn f von der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \ m \in \mathbb{N} \ , \ a_{-m} \neq 0$$

ist. Dabei ist m die so- genannte *Ordnung* der Polstelle z_0.

3.1.10 Kriterium für Pole

Eine isolierte Singularität z_0 von f ist Pol m-ter Ordnung, genau dann wenn

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

existiert und ungleich 0 ist. Sei g holomorph in einer Umgebung von z_0 und z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung von g. Dann hat

$$\frac{1}{g}$$

in z_0 einen Pol m-ter Ordnung.

3.1.11 Definition: Ganz transzendente Funktion

Eine Funktion f ist genau dann *ganz-transzendent*, falls f ganz und kein Polynom ist.

3.1.12 Satz von Casorati-Weierstraß

Sei f holomorph in $0 < |z - z_0| < R$. Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so gilt:

(i) $\forall\, a \in \mathbb{C} : \exists\, (z_n) : z_n \to z_0 \;\wedge\; f(z_n) \to a$

(ii) $\exists\, (w_n) : w_n \to z_0 \;\wedge\; |f(w_n)| \to \infty$

Bemerkungen:

a) Ist f ganz-transzendent, so hat $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0 eine wesentliche Singularität.

b) Für ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ gilt: $p\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt in 0 ein Pol n-ter Ordnung.

Beweis der Bemerkungen:

a) Nach Vorraussetzung ist f kein Polynom, das heißt $\forall\, n \in \mathbb{N}\ : \exists\, n' > n : a_{n'} \neq 0$. Zusammen mit der Darstellung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \underbrace{a_{-n}}_{b_n} z^n \ ,\ z \neq 0$$

impliziert dies nach Charakterisierungssatz 3.1.9 dass 0 keine Polstelle sein kann.
Aufgrund der Eindeutigkeit der Laurent-Reihe von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ kann $f\left(\frac{1}{z}\right)$ nicht holomorph fortgesetzt werden (vgl. Potenzreihenentwickelbarkeit holomorpher Funktionen 2.5.3).

b) Entsprechend.

3.1.13 Satz von Casorati-Weierstraß für ganz-transzendente Funktionen

Für eine ganz-transzendente Funktion f gilt:

(1) $\forall\, a \in \mathbb{C} : \exists\, (z_n) : |z_n| \to \infty \;\wedge\; f(z_n) \to a$

(2) $\exists\, (w_n) : |w_n| \to \infty \;\wedge\; |f(w_n)| \to \infty$

Beweis: Folgt aus den Bemerkungen des Satzes von Casorati-Weierstraß (3.1.12).

3.1.14 Satz von Picard

Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität, so existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass f in jeder Umgebung von z_0 alle Werte von $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ annimmt.

3.2 Residuenkalkül

3.2.1 Definition: Residuum

Sei f holomorph in $\Omega \setminus \{z_0\}$, z_0 sei isolierte singularität. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ ,\ 0 < |z - z_0| < R \ ,\ R > 0$$

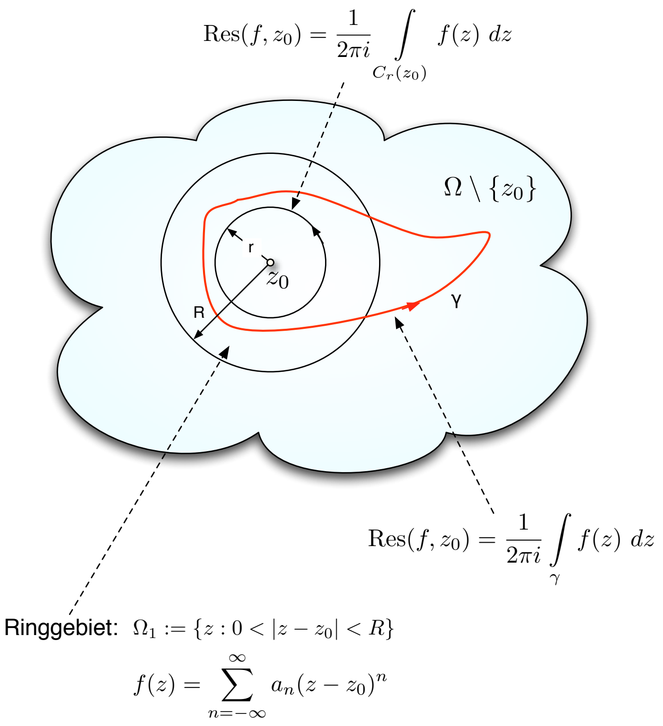
Der Koeffizient a_{-1} heißt *Residuum* von f an der Stelle z_0. Schreibweise:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1}$$

Dabei gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\ dz$$

für $0 < r < R$ und einen beliebigen Weg γ, der z_0 einfach, positiv umläuft und mit seinem Inneren ganz in Ω liegt.
Bemerkung: Obere stellt die einfachste Form des Residuensatzes dar, und folgt aus der Formel für die Koeffizienten von Laurentreihen (3.1.6)



3.2.2 Satz über das Residuum

Die Funktion f sei in $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph und besitze in z_0 eine isolierte Singularität. Dann gilt:

a) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$, das heißt ist z_0 eine hebbare Singularität oder Pol 1. Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

b)

$$\operatorname{Res}(\alpha f + \beta g, z_0) = \alpha \operatorname{Res}(f, z_0) + \beta \operatorname{Res}(g, z_0) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

c) Ist g holomorph in einer Umgebung von z_0 und hat f in z_0 einen Pol 1. Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \cdot \operatorname{Res}(f, z_0)$$

d) Ist z_0 eine einfache Nullstelle von f, so folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f}, z_0\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Beweis: (a) und (b) folgen direkt aus der Laurentreihen-Entwicklung. (c) und (d) folgen aus (a).

Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_1)(z-z_3)} \ , \ z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(1+2k)} \ , \ k = 0,1,2,3 \ , \ g(z) := 1+z^4$$

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{g}, z_k\right) = \frac{1}{g'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4} \ , \ \text{da } z_k^4 = -1$$

3.2.3 Residuensatz

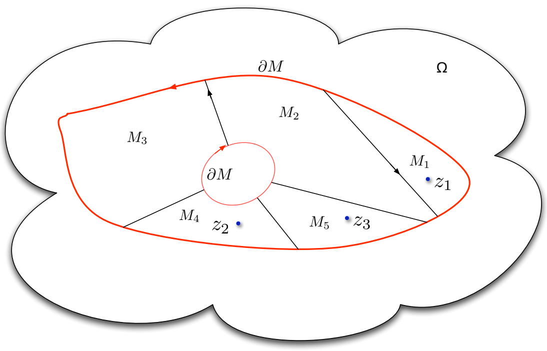
f sei holomorph in Ω mit ausname isolierter Singularitäten. Trifft der in Ω geschlossene Weg γ keine Singularitäten von f, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_0)$$

wobei $z_1, .., z_N$ die von γ umschlossenen Singularitäten seien.
Allgemeiner und genauer: γ sei Rand eines Gebietes M, wobei sich M in $M_1, ., M_m$ zerlegen lasse:

$$\overline{M} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{M}_i \ , \ M_i \cap M_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Dabei umlaufe ∂M_i das Gebiet M_i einfach positiv und es existiere in jedem M_j höchstens eine Singularität. Insbesondere sollte für ∂M_i gelten: enthält M_i keine Singularität, so gilt der Cauchysche Integralsatz.
Beweis:



Ist in M_j keine Singularität enthalten ist, gilt:

$$\int_{\partial M_j} f(z)\ dz = 0$$

Falls in M_j eine Singularität z_k enthalten ist, so ist

$$\int_{\partial M_j} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$

also

$$\int_{\partial M} f(z)\ dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial M_j} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Bemerkung 1: Definieren die Hilfsfunktion $f(z) = \pi \cot \pi z$, wobei

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3} z - \frac{\pi^4}{45} z^3 - \frac{2\pi^6}{945} z^5 - \dots \ , \ 0 < |z| < 1$$

Dabei hat cot einfach Pole an den stellen $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (und Periodizität π) und ist sonst holomorph. Somit hat f Pole an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ (und Periodizität 1) und ist sonst holomorph. Es ist:

$$\operatorname{Res}(f,k) = 1\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

3.2.4 Satz über rationale Funktionen

Es seien p, q teilerfremde Polynome, mit $^\circ(q) \geq^\circ (p) + 2,\ f(z) := \pi \cot \pi z$. Dann gilt:

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ q(n)\neq 0}}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = -\sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q} f, a\right)$$

Beispiel: Eulersche Formeln:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^5}{945}$$

Beweis: Betrachten die Funktionen: $p(z) = 1,\ q(z) = z^2$. Es ist

$$\underbrace{\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}}_{g:=\frac{p}{q}f} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3}\frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45}z - \frac{2\pi^6}{945}z^3 - \dots$$

$$\operatorname{Res}(g,0) = -\frac{\pi^2}{3} \ \Rightarrow\ \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Die anderen beiden Reihen ergeben sich durch $q(z) := z^4$ bzw. $q(z) := z^6$. $\square$

3.2.5 Satz: Berechnung reeller Integrale

Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahmestellen in endlich vielen Singularitäten $z_1, .., z_N$, die nicht auf der reellen Achse liegen. Gilt für geeignete $C \geq 0,\ r > 0$:

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2} \quad \text{für} \quad |z| \geq r\ ,\ \Im(z) \geq 0$$

so folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

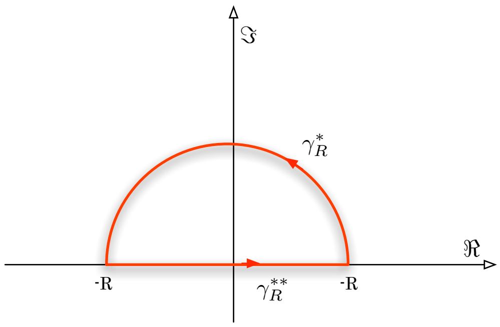
Beweis: Nach dem Majorantenkriterium konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$

Sei $R > r$ so groß dass alle Singularitäten z_k in $B_R(0)$ sind. Betrachten den positiv laufenden Weg γ_R^* um den Halbkreis

$$H^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \Im z > 0\}$$

und den von $-R$ nach R auf der reellen Achse laufenden Weg γ_R^{**}. Nennen $\gamma_R := \gamma_R^{**} \oplus \gamma_R^*$.



Dann ist einerseits

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

und andererseits

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\ dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\ dx + \underbrace{\int\limits_{\gamma_R^*} f(z)\ dz}_{\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\ dz$$

denn

$$\left| \int\limits_{\gamma_R^*} f(z)\ dz \right| \leq \frac{C}{R^2} \cdot \pi R \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

also

$$2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)\ dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dz$$

Bemerkung: Falls f eine analoge Abklingbedingung in der unteren Halbebene $\Im z \leq 0$ erfüllt, so gilt eine ähnliche Formel.

Beispiel:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Beweis: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

hat in der oberen Halbebene einfache Pole:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \ , \ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

und es ist

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = -\frac{z_1}{4} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4} \quad , \quad \mathrm{Res}(f, z_2) = -\frac{z_2}{4} = -\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4}$$

so dass folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3.2.6 Satz: Berechnung von Fourierintegralen

Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahmestellen in endlich vielen Singularitäten $z_1, .., z_N$ die nicht auf der reellen Achse liegen. Für geeignete $C \geq 0,\ r > 0$ gelte:

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2} \quad \text{für} \quad |z| > r$$

Setzen wir

$$g(z) := f(z)e^{ixz}\ ,\ \text{dabei } x \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

so folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\ dt = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(g, z_k) & : x > 0 \\ \\ -2\pi i \sum\limits_{\Im z_k < 0} \operatorname{Res}(g, z_k) & : x < 0 \end{cases}$$

Zusatz: Falls statt $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2},\ |z| > r$ nur die Bedingung $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|},\ |z| > r$ erfüllt ist, dann braucht

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

nicht mehr zu konvergieren. Aber: Die Behauptung bleibt bestehend, wenn man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

durch

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(t)e^{ixt}dt$$

ersetzt. Bemerke: Die Existenz des letzteren impliziert <u>nicht</u> die Konvergenz des Integrals!

Beweis des Zusatzes: γ_R sei wie in (3.2.5). Für $x > 0$ folgt dann

$$\int\limits_{\gamma_R} g(z)\ dz = \int\limits_{-R}^{R} g(t)\ dt + iR \int\limits_{0}^{\pi} e^{it} g(\underbrace{Re^{it}}_{z})\ dt$$

Wegen

$$\left|g\left(Re^{it}\right)\right| = \left|e^{iRxe^{it}} f\left(Re^{it}\right)\right| = e^{-Rx\sin t} \cdot \frac{e}{R}$$

und

$$\sin t \overset{*}{\geq} t - \frac{t^3}{6} = t\left(1 - \frac{t^2}{6}\right) \geq \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(*) : \text{Taylorformel mit Rest} = \frac{f^{(5)}(\vartheta t)}{5!} t^5 \geq 0\ ,\ f^{(5)} = \cos()$$

folgt

$$\left|R\int\limits_{0}^{\pi} e^{it} g\left(Re^{it}\right) dt\right| \leq 2C \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-Rx\sin t} dt \leq 2C \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Rxt} dt = \frac{4C}{Rx}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}R\pi x}\right) \xrightarrow[x>0]{R\to\infty} 0$$

Somit ist die Behauptung für $x > 0$ gezeigt. Der Fall $x < 0$ erfolgt analog durch die Substitution $s = -t$.
□

3.3 Konforme Abbildungen

3.3.1 Satz über analytische Abbildung: Erhaltung der Winkel

Ist f analytisch im Gebiet Ω, so bleiben die Winkel in allen Punkten erhalten, in denen $f'(z) \neq 0$ ist.

3.3.2 Satz über analytische Funktionen: Erhaltung der Verzerrung

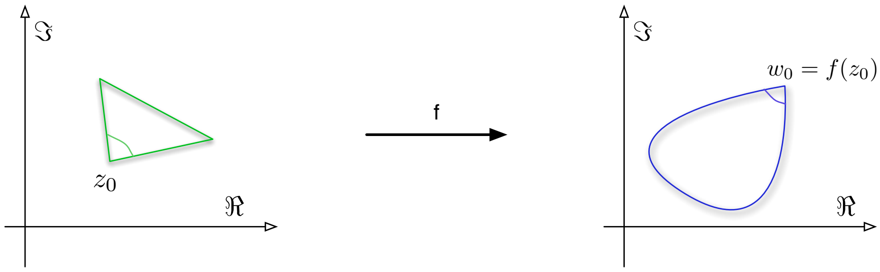
Ist f analytisch im Gebiet Ω, so besitzt die Abbildung f in jedem Punkt $z \in \Omega$ mit $f'(z) \neq 0$ eine von der Richtung unabhängige Verzerrung $|f'(z)|$.

Folgerung: Ist f analytisch in Ω, so besitzt f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$ zwei Eigenschaften:

1. Konstanz der Winkel (einschließlich Orientierung)

2. Konstanz der Verzerrung.

Dabei wählen wir in der $\mathbb{C}$-Ebene ein infinitesimales Dreieck mit Eckpunkt z_0 und das entsprechende infinitesimale Bilddreieck mit Eckpunkt w_0. Dann ist der Winkel bei z_0 und w_0 gleich groß, und die Verhältnisse der entsprechenden Seiten ist gleich $r \neq 0$.



3.3.3 Definition: Konforme Abbildung

Eine Funktion f auf einem Gebiet Ω heißt *konform*, falls f in jeder Stelle $z_0 \in \Omega$ die Eigenschaften (3.3.2) besitzt.