Felder & Teilchen
FSU Jena - SS 08
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

July 18, 2009

Aufgabe 01

In Bornscher Näherung ergibt sich die Übergangsamplitude $i \xrightarrow{t_0 \to t} f$ gemäß

$$A^{(1)}_{i\to f}(t_0 \to t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau \; e^{-\frac{i}{\hbar}(t-\tau)E_f} \langle f|\, V(\tau)\, |i\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar}(\tau - t_0)E_i}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\underbrace{\langle f|\, V\, |i\rangle}_{V_{fi}} \int_{t_0}^{t} d\tau \;\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i) + \varepsilon\right)\cdot\tau - \frac{i}{\hbar}E_f \cdot t + \frac{i}{\hbar}E_i \cdot t_0\right]$$

$$= \frac{V_{fi}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f t - E_i t_0)}}{-(E_f - E_i) + i\hbar\varepsilon}\cdot\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)+\varepsilon\right)\cdot t - \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)+\varepsilon\right)\cdot t_0\right]$$

$$\mathcal{P}^{(1)}_{i\to f}(-\infty \to t) = \lim_{t_0 \to -\infty}\left|A^{(1)}_{i\to f}(t_0 \to t)\right|^2 = \frac{|V_{if}|^2 \cdot e^{2\varepsilon t}}{(E_f - E_i)^2 + (\hbar\varepsilon)^2}$$

Entsprechend ergibt sich die Übergangsrate

$$\Gamma^{(1)}_{i\to f}(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{P}^{(1)}_{i\to f}(-\infty \to t) = \frac{|V_{if}|^2 \cdot e^{2\varepsilon t}2\varepsilon}{(E_f - E_i)^2 + (\hbar\varepsilon)^2}$$

Bekanntlich geht

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \pi\delta(\omega)$$

(Breit-Wigner-Formel) das heißt

$$\Gamma^{(1)}_{i\to f}(t) \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi}\right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Aufgabe 02

a) Nach Euler-Lagrange muss für die Lösungen $\boldsymbol{\varphi}$ gelten:

$$0 \overset{!}{=} \partial_\mu \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}}_{g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi^i} - \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i}}_{-\partial_{\varphi^i}V} = \underbrace{\partial^\mu\partial_\mu\varphi^i}_{\Box\varphi^i} + \frac{\partial V}{\partial\varphi^i} = \Box\varphi^i + \frac{\partial V}{\partial\varphi^i} \qquad (\spadesuit)$$

b) Der Generator Δ^i wirkt auf die Lagrange-Dichte gemäß

$$\Delta^j\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)}\underbrace{\Delta^j\partial_\mu\varphi^i}_{\partial_\mu\Delta^j\varphi^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i}\Delta^j\varphi^i = \underbrace{\varepsilon_{jik}\,\underbrace{g^{\mu\nu}(\partial_\nu\varphi^i)(\partial_\mu\varphi^k)}_{\substack{\text{symmetrisch}\\ \text{in } i,k}}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial\varphi^i}}_{\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\varphi}^2}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^2}{\partial\varphi^i}}\varepsilon_{jik}\varphi^k = -2\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\varphi}^2}\underbrace{\varepsilon_{jik}\varphi^i\varphi^k}_{0}$$

$$= 0$$

Nach Noether ergeben sich die Erhaltungsstromdichten

$$j^{\mu j} = -(\Delta^j\varphi^i)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^i)} = \varepsilon^{jik}\varphi^k\underbrace{g^{\mu\nu}\partial_\nu}_{\partial^\mu}\varphi^i$$

c) Machen die Probe

$$\partial_\mu j^{\mu j} = \varepsilon^{jik}\big[\underbrace{g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi^k)(\partial_\nu\varphi^i)}_{\substack{\text{symmetrisch}\\ \text{in } i,k}} + \varphi^k\underbrace{g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu}_{\Box}\varphi^i\big] \overset{(\spadesuit)}{=} -\underbrace{\varepsilon^{jik}\varphi^k}_{\Delta^j\varphi^i}\frac{\partial V}{\partial\varphi^i} = -\Delta^j V = 0$$

d) Die konjugierten Impulse sind gegeben durch

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi^i)} = g^{0\nu}\partial_\nu\varphi = \partial_0\varphi^i$$

Die erhaltenen Ladungen sind also darstellbar gemäß

$$Q^j = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}\; j^{0j}(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}\;\varepsilon^{jik}\varphi^k\underbrace{g^{0\nu}\partial_\nu\varphi^i}_{\pi_i} = \int d^3\mathbf{x}\;\varepsilon^{jik}\varphi^k\pi_i$$

Dementsprechend erhält man die Poissonklammern

$$\{Q^j,\varphi^i(\mathbf{x})\} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{y}\Big[\underbrace{\frac{\delta Q^j}{\delta\varphi^k(\mathbf{y})}}_{\varepsilon^{jlk}\pi_l(\mathbf{y})}\underbrace{\frac{\delta\varphi^i(\mathbf{x})}{\delta\pi_k(\mathbf{y})}}_{0} - \underbrace{\frac{\delta Q^j}{\delta\pi_k(\mathbf{y})}}_{\varepsilon^{jkl}\varphi^l(\mathbf{y})}\underbrace{\frac{\delta\varphi^i(\mathbf{x})}{\delta\varphi^k(\mathbf{y})}}_{\delta^{ki}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big] = -\varepsilon^{jil}\varphi^l(\mathbf{x})$$

das heißt

$$\{Q^j,\varphi^i\} = \Delta^j\varphi^i$$

wie erwartet.

Aufgabe 03

Beginnend mit der Definition $\overline{\psi} := \psi^\dagger\gamma^0$ schreiben wir

$$\overline{\psi'} = (\exp(i\alpha\gamma_5)\psi)^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\dagger\exp(-i\alpha\gamma_5^\dagger)\gamma^0 \overset{\{\gamma_5,\gamma^0\}=0}{=} \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\overline{\psi}}\exp(+i\alpha\gamma_5)$$

Entsprechend transformiert sich die Lagrange Dichte gemäß

$$\mathcal{L}\mapsto\overline{\psi'}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - \overline{\psi'}m\psi' = \overline{\psi}i\underbrace{e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu}_{\gamma^\mu e^{-i\alpha\gamma_5}}\partial_\mu e^{i\alpha\gamma_5}\psi - \overline{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}me^{i\alpha\gamma_5}\psi = \overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \overline{\psi}me^{2i\alpha\gamma_5}\psi$$

Deren Invarianz ist genau dann gegeben falls

$$1 = e^{2i\alpha\gamma_5} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\gamma_5$$

das heißt

$$\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$$

(beachte γ_5 hermitesch also muss auch $1 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\gamma_5$).

Aufgabe 04

Schreiben

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) = (\omega_p + m)\begin{pmatrix}\chi_r^\dagger & \chi_r^\dagger \frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})^\dagger}{\omega_p+m}\end{pmatrix}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1}\begin{pmatrix}\chi_s \\ \frac{(\mathbf{p}\sigma)}{\omega_p+m}\chi_s\end{pmatrix} \overset{(\sigma^i)^\dagger=\sigma^i}{=} (\omega_p+m)\Big[\underbrace{\chi_r^\dagger\chi_s}_{\delta_{sr}} + \chi_r^\dagger \frac{\overbrace{(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})^2}^{\mathbf{p}^2}}{(\omega_p+m)^2}\chi_s\Big]$$

$$= (\omega_p+m)\Big[1 + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{(\omega_p+m)^2}}_{\substack{\frac{\omega_p-m}{\omega_p+m} \\ \text{da } \mathbf{p}^2=\omega_p^2-m^2}}\Big]\delta_{sr} = 2\omega_p\delta_{sr}$$

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma^i u_s(\mathbf{p}) \overset{i\geq 1}{=} (\omega_p+m)\begin{pmatrix}\chi_r^\dagger \frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})^\dagger}{\omega_p+m}\sigma^i & -\chi_r^\dagger\sigma^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_s \\ -\frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})}{\omega_p+m}\chi_s\end{pmatrix} = \chi_r^\dagger(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\sigma^i\chi_s + \chi_r^\dagger\sigma^i(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\chi_s$$

$$= \chi_r^\dagger p^k \underbrace{(\sigma^k\sigma^i + \sigma^i\sigma^k)}_{\{\sigma^i,\sigma^k\}=2\delta^{ik}}\chi_s = 2p^i\delta_{rs}$$

Zusammengefasst also

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) = 2p^\mu\delta_{rs} \quad , \quad p^0 := \omega_p$$

Aufgabe 05

Nach Wick ist

$$A_1 \dots A_n = \sum_k \sum_{\substack{k \text{ paarweise} \\ \text{Kontraktionen}}} : \dots \overbracket{A_{i_1} \dots A_{i_2}} \cdots :$$

wobei der Vakuumerwartungswert aufgrund der Normalordnung für unvollständige Kontraktionen verschwindet. Ferner sind $\overbracket{c_i^\dagger c_j}$, $\overbracket{c_i c_j}$, $\overbracket{c_i^\dagger c_j^\dagger}$ prinzipiell gleich Null und anderseits $\overbracket{c_i c_j^\dagger} = \delta_{ij}$. Demnach können wir sofort schreiben

$$\langle 0|\, c_i c_j^\dagger c_k c_l c_m^\dagger c_n^\dagger \,|0\rangle = \langle 0|\,(-1)^1 \overbracket{c_i c_j^\dagger}\,\overbracket{c_k c_m^\dagger}\,\overbracket{c_l c_n^\dagger}\,|0\rangle + \langle 0|\,(-1)^2 \overbracket{c_i c_j^\dagger}\,\overbracket{c_k c_n^\dagger}\,\overbracket{c_l c_m^\dagger}\,|0\rangle$$

$$= \delta_{ij}\left(\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ln}\right)$$

Aufgabe 06

Als φ^3 Wechselwirkungsdiagramme bestehen die Feynman-Diagramme zur Ordnung λ^2 aus 2 Vertizes mit jeweils 3 *Beinchen.*

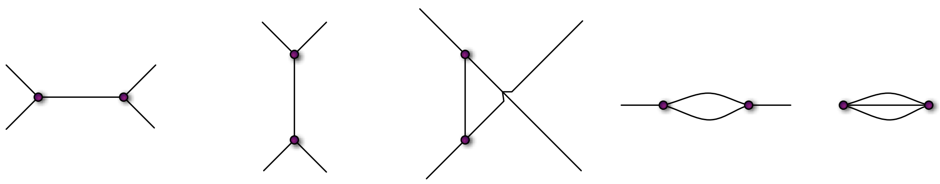

Figure 0.1: Alle zusammenhängende Feynman-Diagramme der Ordnung λ^2 mit gleicher Anzahl an ein- und auslaufenden Teilchen.

Aufgabe 07

Erster Prozess ist **nicht** möglich aufgrund von Verletzung der Ladungserhaltung.
Zweiter Prozess ist prinzipiell möglich, z.B. in der freien Theorie.
Letzter Prozess ist **nicht** möglich aufgrund von Verletzung der Impulserhaltung. Im Massenzentrum des Elektron/Positron Paares besitzen diese nämlich einen Anfangsimpuls 0, das Photon jedoch einen von 0 verschiedenen Impuls.