Felder & Teilchen
FSU Jena - SS 09
Klausur

Dr. U. Theis

18. Juli, 2009

---

01 - Streuprozesse in der QED (2 P.)

Welche der folgenden Prozesse sind *nicht* möglich? Begründen Sie kurz.

$$\begin{aligned} e^- + e^- &\longrightarrow e^+ + e^+ \\ e^- + e^- &\longrightarrow e^- + e^- \\ e^+ + e^- &\longrightarrow \gamma \\ \gamma + \gamma &\longrightarrow \gamma + \gamma \end{aligned}$$

(e^- steht für ein Elektron, e^+ für ein Positron und γ für ein Photon.)

02 - $U(n)$-invariante Feldtheorie (0.5 + 1.5 + 2 + 2 P.)

Betrachten Sie folgende Lagrange-Dichte für ein n-komponentiges komplexes Skalarfeld ϕ:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$$

wobei V eine beliebige Funktion von $\phi^\dagger \phi$ sei.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen von ϕ und $\phi^\dagger$.

b) Überprüfen Sie die Invarianz von $\mathcal{L}$ unter infinitesimalen unitären Transformationen im Feldraum erzeugt durch

$$\Delta_a \phi = i T_a \phi$$

wobei die T_a hermitesche $(n \times n)$-Matrizen sind.

c) Zeigen Sie, dass die zugehörigen Stromdichten durch $j_a^\mu = i\phi^\dagger T_a \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$ gegeben sind und die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

d) Drücken Sie die erhaltenen Ladungen Q_a durch die kanonisch konjugierten Felder und Impulse aus und berechnen Sie die Poisson-Klammer von Q_a mit $\phi(x^0, \vec{x})$.

03 - Wick-Theorem (2 P.)

Es seien $c_i^\dagger$ und c_i fermionische Erzeuger und Vernichter mit Antivertauschungsrelationen

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{c_i, c_j\} = 0 = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\}$$

Berechnen Sie den Vakuumerwartungswert $\langle 0 | \, c_i : c_j c_k^\dagger c_l : c_m^\dagger c_n^\dagger \, | 0 \rangle$.

04 - Feynman-Diagramme in skalarer Feldtheorie (3 P.)

Skizzieren Sie für die Theorie eines reellen Skalarfeldes mit klassischer Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

alle zusammenhängenden Feynman-Diagramme der Ordnung λ^2 mit derselben Anzahl einlaufender wie auslaufender Felder.

05 - Adiabatisches Einschalten einer Störung (3 P.)

Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P^{(1)}_{i\to f}(t,-\infty)$ in Bornscher Näherung für den Störoperator $V(t) = e^{\varepsilon t}V$ wobei $\varepsilon > 0$ und V zeitunabhängig sind. Wie lautet die Übergangsrate $\Gamma^{(1)}_{i\to f}$ im Limes $\varepsilon \to 0$? Hinweis: $2\varepsilon(\varepsilon^2+\omega^2)^{-1} = \int dk\ e^{ik\omega-\varepsilon|k|}$.

06 - Freie Neutrinos (2 P.)

Betrachten Sie die Transformation

$$\psi \to \psi' = \exp(i\alpha\gamma_5)\psi$$

mit konstantem reellen Parameter α und der mit allen γ^μ antivertauschenden hermiteschen Matrix γ_5. Bestimmen Sie die Transformation des Dirac-Konjugierten Spinors $\overline{\psi}$. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Dichte freier Neutrinos

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi$$

invariant unter obiger Transformation ist.

07 - Dirac-Spinoren (3 P.)

Zeigen Sie, dass

$$\overline{v}_r(\vec{k})\gamma_5 u_s(\vec{k}) = -2m\varepsilon_{rs}$$

wobei in der Dirac-Basis

$$u_s(\overline{k}) = \sqrt{\omega_k+m}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega_k+m}\chi_s\end{pmatrix} \quad , \quad v_s(\vec{k}) = -\sqrt{\omega_k+m}\begin{pmatrix}\frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega_k+m}\varepsilon\chi_s^*\\ \varepsilon\chi_s^*\end{pmatrix}$$

mit orthonormierten, standardorientierten, zweikomponentigen Spinoren χ_s (z.B. mit Komponenten $(\chi_s)_r = \delta_{sr}$), sowie

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}1_{2\times2} & 0\\ 0 & -1_{2\times2}\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix}0 & 1_{2\times2}\\ 1_{2\times2} & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$