Klausur ExPhysik I - FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 12, 2007

Aufgabe 1

Sei $l = 0.6m$ die Länge des Laufes, $F_0 = 200N$ die Anfangskraft, $m = 6 \cdot 10^{-3} Kg$ die Masse des Geschoßes, $\alpha = \frac{2}{3} N/cm = \frac{200}{3} N/m$ die Abnahme der Kraft pro Weg. Die Kraft $F(x)$ an Position x ist gegeben durch:

$$F(x) = F_0 - \alpha x$$

Aus der Definition von Arbeit wissen wir:

$$W = \int_{Weg} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Für unseren Fall also:

$$W = E_{kin} = \int_0^l F(x) dx = \int_0^l (F_0 - \alpha x) dx = F_0 l - \frac{\alpha l^2}{2} = 108J$$

Aus der Kinetischen Energie berechnen wir jetzt die Endgeschwindigkeit v:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} = 60\sqrt{10}\ m/s$$

Aufgabe 2

a) Die potentielle Energie E_{pot} des Geschoßes an der Oberfläche des Zentralkörpers ist:

$$E_{pot} = -\frac{Gm_G m_Z}{R}$$

Um das Geschoß ins Unendliche zu befördern muss man Ihm eine Kinetische Energie $E_{kin} = -E_{pot}$ hinzufügen, da im Unendlichen seine potentielle Energie gleich Null ist. Also:

$$\frac{m_G v_f^2}{2} \overset{!}{=} \frac{Gm_G m_Z}{R} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2Gm_z}{R}}$$

b) Auf der Umlaufbahn gilt:

$$F_z = \frac{v_u^2}{R} m_G = F_G = \frac{Gm_G m_Z}{R^2} \Rightarrow v_u = \sqrt{\frac{Gm_z}{R}}$$

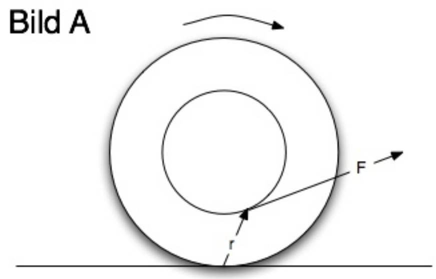
Das Verhältniss v_u/v_f ist also $1/\sqrt{2}$.

c) Aufgrund der Rotation hat das Geschoß schon eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \omega R \cos(\theta)$, wobei θ der Breitengrad ist. Die optimalste Position wäre am Äquator: $\theta = 0$, also $v_0 = \omega R$. Die optimalste Abschußrichtung ist außerdem in Richtung Drehbewegung. Also muss jetzt nur:

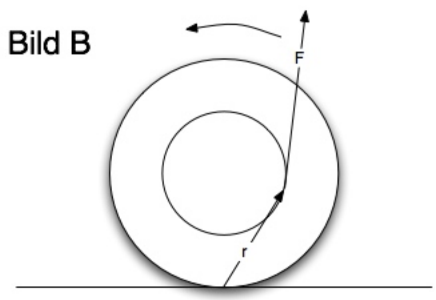
$$v_a + v_0 = v_f \Rightarrow v_a = v_f - v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_z}{R}} - \omega R$$

Aufgabe 3

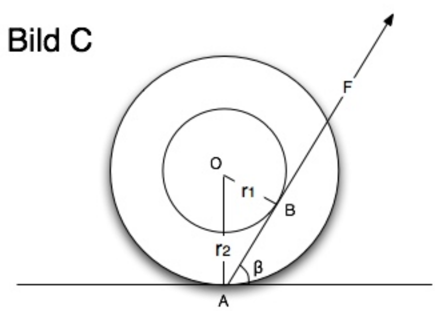
Der Drehimpuls $\vec{M}$ den die Kraft $\vec{F}$ am Faden verursacht ist gegeben durch $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, wobei $\vec{r}$ der Vektor zum Wirkungspunkt. Bei einem genügent kleinen Winkel rotiert also die Rolle nach rechts (Siehe Bild A).



Bei genügend großen Winkeln geht die Bewegung in die andere Richtung über (Siehe Bild B).



Der Grenzfall wird in Bild C illustriert. Dabei geht die Wirkungslinie der Kraft genau durch die Rotationsachse A durch.

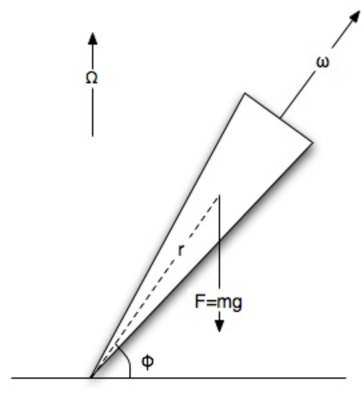


In dem Fall gilt:

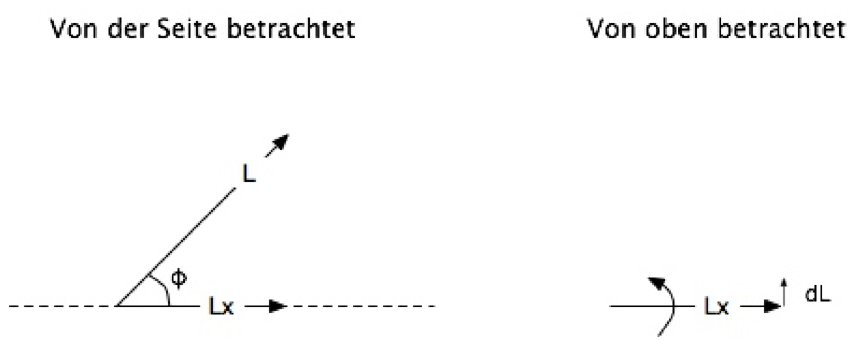
$$\overline{OB} \perp \overline{BA},\ O\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \beta,\ \sin(O\hat{A}B) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{r_1}{r_2}\ \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Aufgabe 4

Der Kreisel sei im folgenden Bild illustriert.



Die Schwerkraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$, wobei m die Masse des Kreisels, bewirkt einen Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$ senkrecht zur Achse $\vec{r}$ und der Kraft $\vec{F}_G$ *in das Bild rein.* Demzufolge ändert sich der Drehimpulses $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ wie im folgenden Bild zu sehen ist:

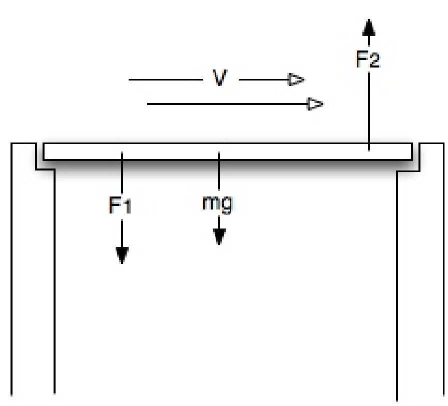


Da $\vec{M}$ parallel zur Horizontalen gerichtet ist, ändert sich die Vertikale Komponente von $\vec{L}$ nicht. Es findet also lediglich nur eine Rotation von $\vec{L}_x$ statt. Es gilt:

$$L_x = \cos(\phi) \cdot L,\ \Omega \cdot L_x = \frac{dL_x}{dt} = M = mgr\cos(\phi) \ \Rightarrow\ \Omega = \frac{mgr\cos(\Phi)}{L_x} = \frac{mgr}{L}$$

Aufgabe 5

Seien A die Fläche und $m = Ad\rho_H$ die Masse des Deckels. Auf den Deckel wirken folgende Kräfte: Das Gewicht $F_G = mg$ und die Druckkraft $F_1 = AP_1$ nach unten, und die Druckkraft $F_2 = AP_2$ nach oben.



Die Luft im inneren des Gefäßes sei still. Dann gilt nach der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\rho_L v^2}{2} + P_1 + dg\rho_L = P_2 = const$$

Damit der Deckel abhebt muss gelten:

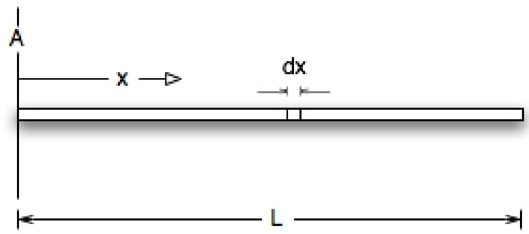
$$\sum F = F_2 - F_1 - mg \overset{!}{>} 0 \;\Rightarrow\; AP_2 > AP_1 + Ad\rho_H g \;\Rightarrow\; P_2 > P_1 + d\rho_H$$

Zusammen mit der Bernoulli-Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\rho_L v^2}{2} + P_1 + dg\rho_L > P_1 + d\rho_H g \;\Rightarrow\; v > \sqrt{\frac{2dg\,(\rho_H - \rho_L)}{\rho_L}} \approx 15m/s$$

Aufgabe 6

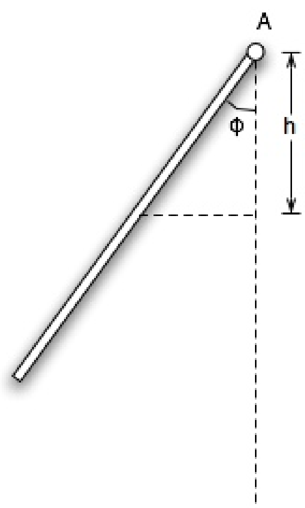
a) Sei J der Trägheitsmoment eines langen, dünnen, homogenen Stabes der um die Achse A an seinem Ende wie im Bild unten rotiert.



Dieser ist:

$$J = \int_V r^2 dm = \int_0^L \frac{x^2 m}{L} \cdot dx = \frac{L^2 m}{3}$$

b) Sei ϕ der gesuchte Winkel und $v = 5m/s$ die zu erreichende Geschwindigkeit. In dieser Auslenkung ϕ befindet sich der Schwerpunkt des Stabes im kleinsten Abstand $h = L\cos(\phi)/2$ vom Aufhängepunkt A und der Stab hat so eine maximale potentielle Energie.



Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage befindet sich der Schwerpunkt im Abstand $L/2$ vom Punkt A, was bedeutet das potentielle Energie des Stabes um $\Delta E_p = mgL(1-\cos(\phi))/2$ abgenommen hat. Diese hat sich jetzt in kinetische bzw. Rotationsenergie $E_r = J\omega^2/2$ umgewandelt wobei $\omega = v/L$ die Winkelgeschwindigkeit des Stabes um A ist. Also gilt:

$$E_r = \frac{Jv^2}{2L^2} = \frac{mv^2}{6} = E_p = \frac{mgL(1-\cos(\phi))}{2} \;\Rightarrow\; \cos(\phi) = 1 - \frac{v^2}{3gL} = 1 - \frac{25}{30(26+2/3)} = \frac{155}{166} \approx 1 \;\Rightarrow \phi \approx 0$$

Da ϕ sehr klein ist, können wir die Näherung $\cos(\phi) \approx 1 - \phi^2/2$ machen, und erhalten

$$\phi^2 = \frac{2v^2}{3gL} \;\Rightarrow\; \phi = 0.25\ rad$$