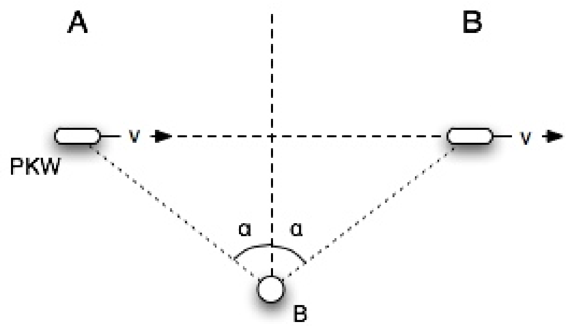
Klausur ExPhysik I - FSU Jena - WS 04/05
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 11, 2007

Aufgabe 1

Betrachten wir folgende Illustration:



Sei v die gesuchte Geschwindigkeit. Für einen bestimmten Winkel a ist die relativ-Geschwindigkeit v_r PKW-Beobachter gleich $v_r = v\sin(\alpha)$. Ist f die original-Frequenz des Motorgeräusches, so ist die Frequenz f' die der Beobachter misst gegeben durch

$$f' = \frac{cf}{c+v_r} = \frac{cf}{c+v\sin(\alpha)}$$

Offensichtlich ist die gemessene Frequenz maximal für $a = -30°$ und minimal für $a = 30°$.

$$f_{max} = \frac{cf}{c+v\sin(-\pi/6)} = \frac{2cf}{2c-v},\ f_{min} = \frac{cf}{c+v\sin(\pi/6)} = \frac{2cf}{2c+v}$$

Für $\alpha = 0$, also am Zeitpunkt wo PKW und Beobachter den kleinsten Abstand von einander haben, ist $f' = f = 80Hz$. So ergibt sich:

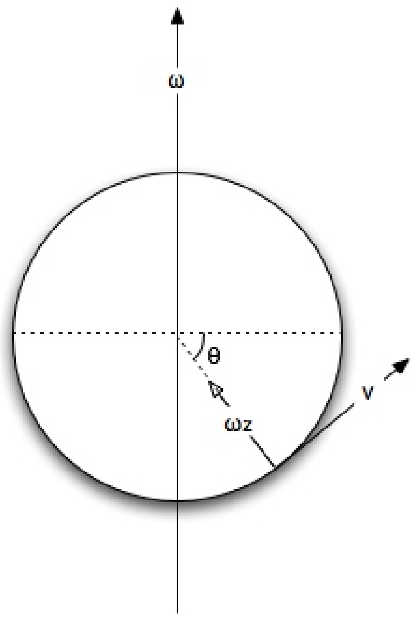
$$\Delta := 12Hz = f_{max} - f_{min} = \frac{4cvf}{4c^2 - v^2} \ \Rightarrow\ \Delta v^2 + 4cfv - 4\Delta c^2 = 0$$

Lösen dieser Quadratischen Gleichung ergibt:

$$v = \frac{2c}{\Delta}\cdot\left[\sqrt{f^2+\Delta^2} - f\right] = \frac{2cf}{\Delta}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{\Delta^2}{f^2}} - 1\right] \approx \frac{2fc}{\Delta}\cdot\left[1+\frac{\Delta^2}{2f^2} - 1\right] = \frac{c\Delta}{f} = 36m/s$$

Aufgabe 2

Sei m die Masse, θ der Breitengrad und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Läufers. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist $\omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) \approx 7.5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$. Die Corioliskraft $\vec{F}$ ist gegeben durch $\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$.



Fall 1: Bewegung in Richtung Norden. Wir setzen unser Koordinatensystem (Ursprung am Läufer) so dass $\vec{z}_0$ in Richtung Erdmittelpunkt zeigt, $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$ und $\vec{y}_0$ in Richtung Osten. Dann ist

$$\omega_z = \sin(\theta) \cdot \omega, \ \vec{v}_x = \vec{v}, \ \omega_y = 0$$

$$\|\vec{F}\| = \|2m\vec{v} \times \vec{\omega}\| = \|2m(\vec{v}_x \times \vec{\omega}_x + \vec{v}_x \times \vec{\omega}_y + \vec{v}_x \times \vec{\omega}_z)\| = 2m(0 + 0 + v \cdot \omega_z) = 2mv\omega \sin(\theta)$$

Aus dem Bild kann man außerdem erkennen dass $\vec{F}$ nach Westen gerichtet ist (Korkenzieherregel).

Fall 2: Bewegung in Richtung Osten. Behalten wir das selbe Koordinatensystem, so ist diesmal

$$\vec{v} = (0, v, 0), \ \vec{\omega} = \omega \cdot (\cos(\theta), 0, \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2mv\omega(\sin(\theta), 0, -\cos(\theta))$$

Diese Kraft $\vec{F}$ ist senkrecht zur Erd-Rotationsachse nach außen gerichtet, und hat den Betrag $2mv\omega$.

Aufgabe 3

a) Sei v die Geschwindigkeit mit der das Wasser aus einem Loch in einer bestimmten Höhe h_1 austritt. Dann ist der zurückgelegte horizontale Abstand s gegeben durch

$$s = v\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Da der Querschnitt des Gefäßes *groß* ist, können wir annehmen das die Geschwindigkeit mit der der Wasserspiegel abnimmt gleich 0 ist. Dann gilt nach der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\rho v^2}{2} = (H - h_1)g\rho \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2g(H - h_1)} \;\Rightarrow\; s = 2\sqrt{(H - h_1)h_1}$$

wobei ρ die Dichte des Wasser ist. Das maximale s bzw. das entsprechende h_{max} zu berechnen ist jetzt eine mathematische Routine-Arbeit

$$\frac{ds}{dh_1} = \frac{(H - 2h_1)}{\sqrt{(H - h_1)h_1}} \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; h_{max} = \frac{H}{2}$$

b)

$$s_1 = 2\sqrt{(H - h_1)h_1} \stackrel{!}{=} s_2 = 2\sqrt{(H - h_2)h_2} \;\Rightarrow\; H = h_1 + h_2$$

Aufgabe 4

Analog zu Aufgabe 2, sei θ der Breitengrad des Labors, und $\omega \approx 7.5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Betrachten wir das Pendel mal von außen (also in einem Inertialsystem). Die Schwingungsebene ändert sich in diesem System nicht. Was sich ändert ist die Position bzw. die Richtung der Erde in Bezug auf die Schwingungsebene. Die Erde rotiert also unter dem Pendel herum! Geschieht dies mit der Winkelgeschwindigkeit Ω, so erscheint es im Labor als würde sich die Schwingungsebene mit $-\Omega$, also in die entgegengesetzte Richtung drehen. Wir können uns $\vec{\omega}$ als die Zusammensetzung von $\vec{\omega}_z$ und $\vec{\omega}_x$ vorstellen. Wir können also $\vec{\omega}_x$ aus dem Spiel lassen da dies nichts an der Schwingungsebene ändert. Dann *rotiert* die Schwingungsebene mit

$$\Omega = \omega_z = \omega \sin(\theta)$$

Ein vollständiger Umlauf dauert entsprechend

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin(\theta)}$$

An den Polen also 24 Stunden und am Äquator unendlich lange!

Aufgabe 5

Eine Versetzung x_1 bzw. x_2 der ersten bzw. der zweiten Masse bewirkt eine Verlängerung $l_1 = x_1$ der ersten, $l_2 = (x_2 - x_1)$ der zweiten und $l_3 = -x_2$ der dritten Feder. Auf die erste bzw. die zweite Masse wirkt also die Gesamtkraft

$$F_1 = -kx_1 + (x_2 - x_1)k = (-2x_1 + x_2)k,\; F_2 = -kx_2 + (x_1 - x_2)k = (-2x_2 + x_1)k$$

Es gilt also nach dem Newtonschen Kraftgesetz:

$$\ddot{x}_1 = (-2x_1 + x_2)\frac{k}{m},\; \ddot{x}_2 = (-2x_2 + x_1)\frac{k}{m}$$

Um dieses Differenzialgleichungssystem zu lösen machen wir folgende Substitution:

$$\xi^+ := x_1 + x_2,\; \xi^- := x_1 - x_2 \;\Rightarrow\; \ddot{\xi}^+ = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2,\; \ddot{\xi}^- = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$$

Addieren wir die vorigen beiden DGL so ergibt sich:

$$\ddot{\xi}^{+} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -(x_1 + x_2)\frac{k}{m} = -\xi^{+}\frac{k}{m}, \quad \ddot{\xi}^{-} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{3k}{m}(x_1 - x_2) = -\xi^{-}\frac{3k}{m}$$

Die Eigenschwingungsfrequenzen sind gegeben durch:

$$f_1 := \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \; f_2 := \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Tip zum weitermachen: Diese beiden DGL 2er Ordnung können wir jetzt ganz leicht lösen (e-Ansatz). Da es nicht um das Lösen von DGL geht, wird hier nicht weiter drauf eingegangen. Letztendlich ergibt sich wie bei jeder normalen harmonischen Schwingung:

$$x_1 + x_2 = \xi^{+} = \xi_0^{+} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1), \; \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \; \xi_0^{+}, \phi_1 : Const$$

$$x_1 - x_2 = \xi^{-} = \xi_0^{-} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2), \; \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \; \xi_0^{-}, \phi_2 : Const$$

$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{\xi^{+} + \xi^{-}}{2}, \; x_2 = \frac{\xi^{+} + \xi^{-}}{2}$$

Aufgabe 6

Die Schwingungsdauer T eines Pendels der Länge L in einem Schwerefeld der Beschleunigung γ ist gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\gamma}}$$

Innerhalb des Schachts ist die Beschleunigung:

$$\gamma_1 = \frac{g(R-h)}{R}$$

wobei R der Erdradius ist. Für den Turm gilt:

$$\gamma_2 = \frac{gR^2}{(R+H)^2}$$

Da die Schwingungsdauer in beiden Situationen gleich ist, gilt:

$$\gamma_1 = \gamma_2 \;\Rightarrow\; \frac{R^2}{(R+H)^2} = \frac{(R-h)}{R} \;\Rightarrow\; h = \frac{HR(H+2R)}{(H+R)^2}$$