Eine Einführung in eindimensionale, ungedämpfte Wellen und den Doppler-Effekt

Stilianos Louca

30. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Kurze Beschreibung des Artikels

Dieser Artikel behandelt die eindimensionale, ungedämpfte Ausbreitung von harmonischen, hauptsächlich mechanischen, Schwingungen in einem homogenen Medium unter konstanter Geschwindigkeit. Dabei wird nicht die Ursache der Ausbreitung bzw. eine Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit behandelt sondern lediglich die daraus folgenden Implikationen beschrieben! Eine Einführung in den Doppler Effekt wird ebenfalls behandelt. Der Artikel wendet sich hauptsächlich an Studenten der Physik im ersten Fachsemester.

1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Wellen

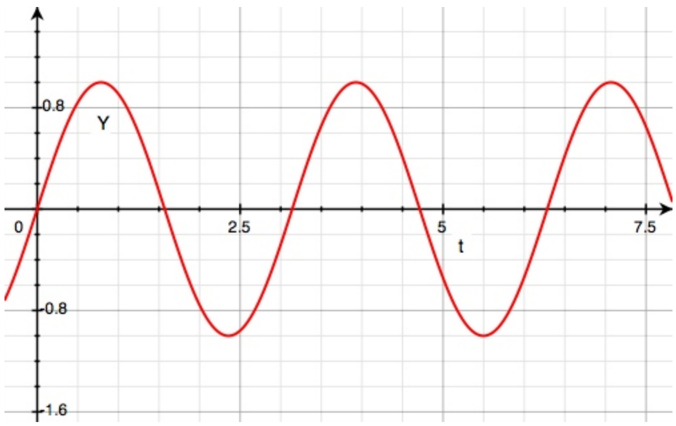
2.1 Die (mechanische) harmonische Schwingung

Die (eindimensionale) Bewegung eines Massenpunktes wird als harmonische Schwingung[1] mit der Frequenz f und der Amplitude A bezeichnet wenn seine Position Y_0 durch die zeitliche Funktion

$$Y_0(t) = A \sin\left(2\pi f \cdot t + \phi_0\right), \ \phi_0 : const$$

beschrieben wird. Die Konstante ϕ_0 nennt man die Anfangsphase dieser Schwingung. Wir werden von nun an diese Konstante als 0 betrachten. Die Größe $\omega := 2\pi f$ nennt man die *Kreisfrequenz* der Schwingung. Analog zu anderen periodischen Prozessen nennt man $T := 1/f = 2\pi/\omega$ die *Periodendauer* der Schwingung.

Untere Graphik stellt die Position Y_0 eines solchen Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t dar. Amplitude ist 1 *Einheit* und die Kreisfrequenz $\omega = 2$ *Zeiteinheiten*$^{-1}$.



Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens ist gegeben durch:

$$v(t) = \frac{dY_0}{dt} = A\omega \cos\left(\omega t\right)$$

wobei $v_0 := \max\left\{v(t) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \omega A$ die maximale Geschwindigkeit ist. Die Beschleunigung $a(t)$ ist gegeben durch:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin\left(\omega t\right) = -\omega^2 Y_0(t)$$

wobei $a_0 := \max\left\{a(t) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \omega^2 A$ die maximale Beschleunigung ist. Position und Beschleunigung haben also einen Phasenunterschied von π rad.

2.2 Ausbreitung der Schwingung

In einem Medium das durch zwischenmolekulare Kräfte charakterisiert wird, lässt ein schwingendes Teilchen im allgemeinen Fall seine Umgebung nicht ungestört. Durch seine Bewegung werden auch die benachbarten Teilchen zum Schwingen angeregt, die dann wiederum andere Teilchen anregen. Man spricht von einer Ausbreitung der *Störung* im Medium, einer so-genannten *Welle*! In diesem Artikel werden wir uns nicht mit einer detaillierteren Untersuchung dieses Phänomens beschäftigen, sondern annehmen das sich jedes *Signal* bzw. Störung mit einer konstanten Geschwindigkeit c, die so-genannte *Phasengeschwindigkeit*, ausbreitet! Dabei werden wir nichtmal einen Unterschied zwischen den verschiedenen Wellenarten machen! Diese Konstante *Schallgeschwindigkeit*[2] c ist eine charakteristische Eigenschaft des Mediums und ist im allgemeinen Frequenz- bzw. Amplitudenunabhängig!
Wollen wir jetzt mal sehen was das eigentlich impliziert!

[1]Siehe Artikel *Harmonische Schwingungen*
[2]Schall ist auch eine mechanische Welle

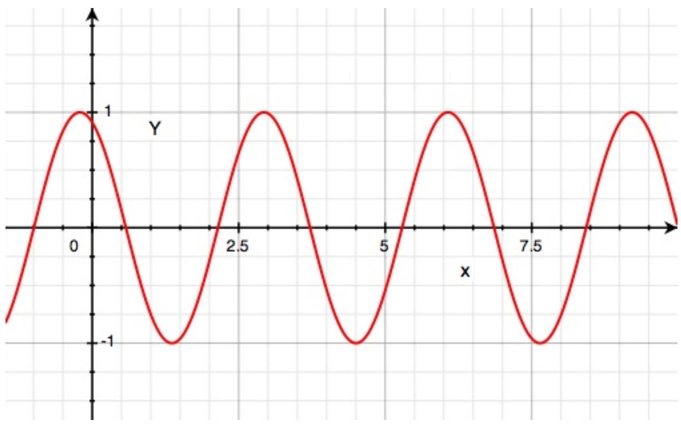
2.3 Die Wellengleichung

Sei Y_1 die Position (bzw. Abweichung) eines Teilchens T_1 in der Umgebung eines mit der Frequenz f und der Amplitude A Schwingenden Teilchens T_0. Der Abstand dieser beiden Teilchen sei gegeben durch x. Wir wollen jetzt die Funktion $X_1(t,x)$ herleiten.
Wir wollen erstmal annehmen das sich die Welle verlustfrei, das heisst mit einer konstanten Amplitude, nur in einer Richtung, also eindimensional, mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Dann hat jedes Signal eine Zeit $\Delta t = x/c$ gebraucht um von T_0 zu T_1 zu gelangen. Die beiden Teilchen bewegen also einfach mit einem ortsabhängigen *Zeitunterschied* Δt. Es gilt also:

$$Y_1(x,t) = Y_0(t - \Delta t) = Y_0\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

Das Teilchen T_1 führt also auch eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω aus. Der einzige Unterschied zum Teilchen T_0 ist eine ortsabhängige Phasenverschiebung $\phi_0 = -\omega x/c \equiv const.$

Untere Graphik stellt die Position Y_1 eines solchen Teilchens in Abhängigkeit vom Ort x im Zeitpunkt $t = 10$ *Zeiteinheiten* dar. Amplitude ist 1 *Ortseinheit*, die Schallgeschwindigkeit $c = 1$ *Ortseinheit* $\cdot$ *Zeiteinheit*$^{-1}$ und die Kreisfrequenz $\omega = 1$ *Zeiteinheit*$^{-1}$.



2.4 Eigenschaften der Welle

Aus der Wellengleichung sieht man das die Position der Teilchen entlang der Ausbreitungsrichtung sowohl zeitlich als auch örtlich periodisch verläuft. Die zeitliche Periodendauer T_1 ist offensichtlich gleich $T = 2\pi/\omega$. Mit einem scharfen Blick erkennt man dass der örtliche *Periodenabstand* λ gegeben ist durch:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c}{2\pi f} = \frac{c}{f}$$

Dieser Abstand λ ist die so-genannte *Wellenlänge*. Simpel gesagt, ist es der Abstand zwischen zwei auf-einanderfolgenden örtlichen Maxima! Wir können also die Wellengleichung auch schreiben als:

$$Y_1(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Der Phasenunterschied $\Delta\phi$ zwischen zwei Teilchen im Abstand Δx zu einander ist gegeben durch:

$$\Delta\phi = -\frac{\omega x_2}{c} - \left(-\frac{\omega x_1}{c}\right) = -\frac{2\pi f}{c}\Delta x = -2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Befinden sich also zwei Teilchen im Abstand λ zu einander so befinden sie sich praktisch *in Phase*.

3 Überlagerung von Wellen

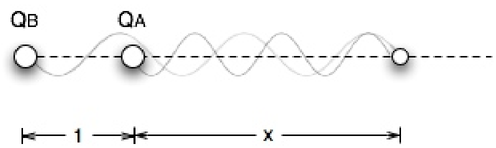
3.1 Das Superpositionsprinzip

Treffen zwei Wellen aufeinander, so gilt das so-genannte *Superpositionsprinzip*, das heisst, die von den jeweiligen Wellen entstehenden Positionsänderungen der Teilchen *überlagern* sich einfach. Sind also $Y_0, ..., Y_n$ sich in x treffende Wellen, dann ist die Abweichung Y dort gegeben durch:

$$Y(x,t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i(x,t)$$

Beispiel

Eine Welle A der Wellenlänge λ_a und eine Welle B der Wellenlänge λ_b verlaufen mit der konstanten Geschwindigkeit c in die selbe Richtung. Beide Wellen haben die gleiche Amplitude Γ. Die Quelle Q_A befindet sich im Abstand d vor der Quelle Q_B. Welche Bewegung $Y(x,t)$ führt ein Teilchen im Abstand x von der ersten Quelle durch?



Antwort Die Perioden T_a und T_b der beiden Wellen sind jeweils gegeben durch

$$T_i = \frac{\lambda_i}{c},\ i \in \{a,b\}$$

Die Wellengleichungen sind also jeweils:

$$Y_a(x,t) = \Gamma \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T_a} - \frac{x}{\lambda_a}\right)\right] = \Gamma \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_a}(tc - x)\right]$$

und

$$Y_b(x,t) = \Gamma \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T_b} - \frac{x+d}{\lambda_b}\right)\right] = \Gamma \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_b}(tc - x - d)\right]$$

Es gilt also:

$$Y(x,t) = (Y_a + Y_b)(x,t) = \Gamma\left(\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_b}(tc - x - d)\right] + \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_a}(tc - x)\right]\right)$$

$$= 2\Gamma \sin\left[\pi\left(\frac{tc - x - d}{\lambda_b} + \frac{tc - x}{\lambda_a}\right)\right] \cos\left[\pi\left(\frac{tc - x - d}{\lambda_b} - \frac{tc - x}{\lambda_a}\right)\right]$$

Bei gleichen Wellenlängen $\lambda_a = \lambda_b =: \lambda$ ergibt sich:

$$Y(x,t) = 2\Gamma \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}(2tc - 2x - d)\right] \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)$$

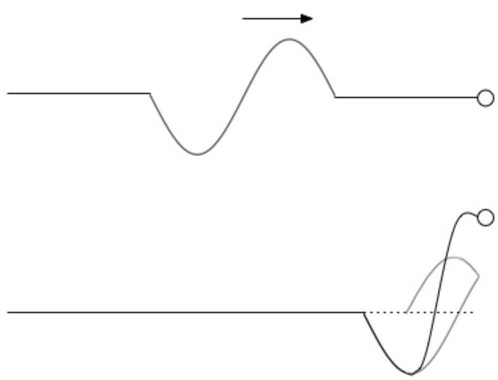
Ist also $d = \lambda/2$, *löschen* sich die beiden Wellen gegenseitig aus! Es findet nirgends eine Schwingung statt!

3.2 Stehende Wellen

Trifft eine Welle der Amplitude A und der Wellenlänge λ in ein anderes Medium ein, bzw. ist das Medium plötzlich nicht vorhanden, so tritt im allgemeinen Fall eine so-genannte Reflexion auf. Die Natur dieser Reflexion bzw. deren Ursachen zu untersuchen ist nicht Sinn dieses Artikels. Wir werden lediglich als gegeben nehmen dass diese Auftritt, und wollen die daraus entstehenden Phänomene genauer Untersuchen.

3.2.1 Reflexion an einem freien Ende

Eine Welle verlaufe entlang eines eindimensionalen Mediums, zb. einem Faden, dessen Ende frei in Schwingung gesetzt werden kann. Kommt die Welle an diesem so-genannten *freien* Ende an, so wird sie Reflektiert und zwar so dass sich die reflektierte Welle in Phase mit der ursprünglichen befindet.



Im Medium verbreiten sich jetzt plötzlich zwei in entgegen-gesetzter Richtung verlaufende Wellen, mit der gleichen Amplitude A[3].
Ist

$$Y_u(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right],\ T=\frac{\lambda}{c}$$

die Wellengleichung der Uspründlichen Welle (Koordinatenursprung im freien Ende) dann ist

$$Y_r(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

die Wellengleichung für das Echo.

***Wie kommt man auf diese Gleichungen:** Es sind im wesentlichen zwei Punkte zu beachten:

a) Für x=0 müssen beide Wellen Identisch sein.

b) Die Phase der ursprünglichen Welle muss mit x zunehmen, die Phase des Echos muss mit x abnehmen!

Jetzt können wir wieder das Superpositionsprinzip anwenden:

$$Y(x,t) = (Y_u+Y_r)(x,t) = 2A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = 2A\sin(\omega t)\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

Die verschiedenen Punkte entlang des Mediums oszillieren also mit einer *ortsabhängigen* Amplitude $A'(x) = 2A\cos(2\pi x/\lambda)$ und der ursprünglichen Frequenz $f = 1/T$. Es entsteht eine so-genannte *stehende Welle*! Es ist offensichtlich dass jeweils die Punkte in den Abständen

$$x = k\cdot\frac{\lambda}{2},\ k\in\mathbb{N}_0$$

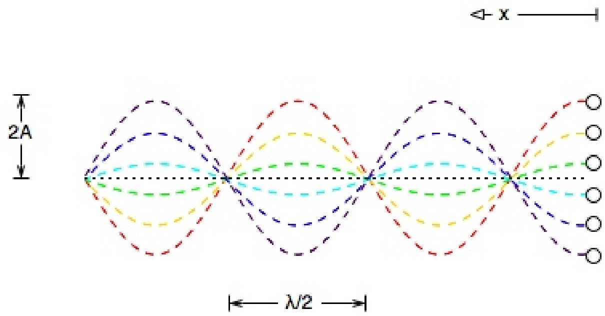
mit einer maximalen Amplitude $2A$ oszillieren. Die sich in Schwingung befindenden Umgebungen bezeichnet man als *Schwingungssbäuche*. Alle Teilchen in einem Schwingungsbauch oszillieren in Phase. Zwei benachbarte Schwingungsbäuche haben einen Phasenunterschied $\Delta\phi = \pi$ (bzw. Amplituden mit entgegengesetzten Vorzeichen). Dagegen bleiben die Punkte in den Abständen

$$x = \frac{\lambda}{4} + k\cdot\frac{\lambda}{2},\ k\in\mathbb{N}_0$$

[3]Wir gehen davon aus das die Reflexion verlustfrei stattfindet

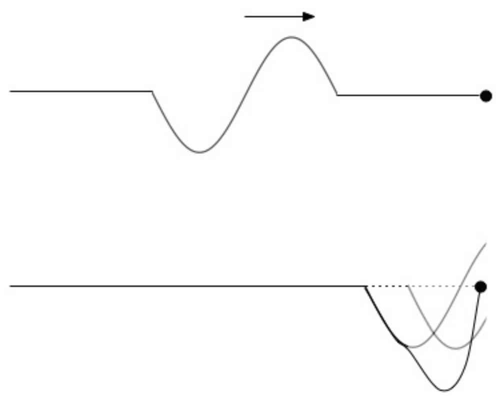
still! Diese Punkte nennt man die so-gennanten *Knoten*. Der Abstand zwischen zwei aufeinander-folgenden Knoten beträgt jeweils $\lambda/2$, wobei der erste Knoten sich im Abstand $\lambda/4$ vom freien Ende befindet.

Untere Graphik illustriert charakteristische Wellenzustände in verschiedenen Zeitpunkten.



3.2.2 Reflexion an einem festen Ende

Eine Welle verlaufe entlang eines eindimensionalen Mediums, zb. einem Faden, dessen Ende fixiert im Raum ist. Kommt die Welle an diesem fixierten Ende an, so wird sie Reflektiert und zwar mit einem so-genannten *Phasensprung* $\Delta\phi = \pi$.



Analog zum vorherigen Fall (3.2.1) ist

$$Y_u(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

die Wellengleichung der Ursprungs-Welle. Analog ist

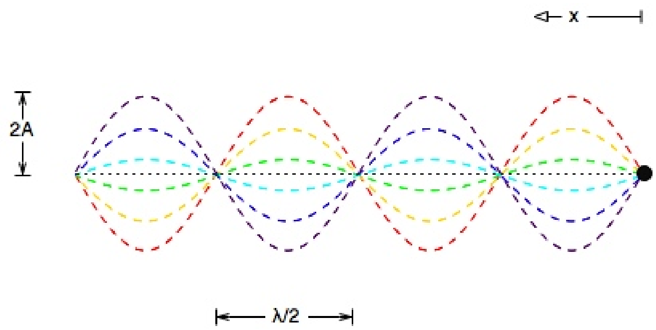
$$Y_r(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right]$$

die Wellengleichung für das Echo. Durch das Superpositionsprinzip erhält man:

$$Y(x,t) = (Y_u + Y_r)(x,t) = 2A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\cos(\omega t)\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

Wie erwartet, entsteht ähnlich wie vorhin eine stehende Welle.

Untere Graphik illustriert charakteristische Wellenzustände in verschiedenen Zeitpunkten.



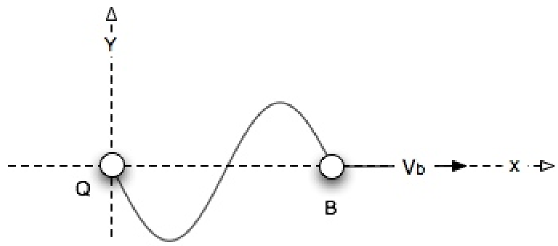
Der Knoten-abstand beträgt auch hier $\lambda/2$, nur ist der erste Knoten das feste Ende ansich!

4 Der Doppler-Effekt

Wir haben gesehen dass solange Quelle (T_0) und Beobachter (T_1) sich relativ zum Medium nicht bewegen die gemessene Schwingungs-Frequenz f für beide die Gleiche ist. Wir wollen jetzt mal sehen was passiert wenn dies nicht der Fall ist. Unser Bezugssystem sei dabei immer das Medium. Außerdem wollen wir nur Fälle betrachten wo die entsprechenden Geschwindigkeiten nicht höher sind als c.

4.1 Bewegte Beobachter

Zu betrachten sei eine *fixierte* Quelle Q und ein sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_b entlang der Wellenausbreitungsrichtung bewegender Beobachter.



Die Abweichung $Y(x,t)$ jedes Punktes im Medium ist gegeben durch die Wellengleichung:

$$Y(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Die Position x des Beobachters ändert sich jedoch mit der Zeit:

$$x(t) = x_0 + v_b t$$

Es gilt also:

$$Y_b(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + v_b t}{\lambda}\right)\right] = A \sin\left[2\pi\left(f_q - \frac{v_b}{\lambda}\right) t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right]$$

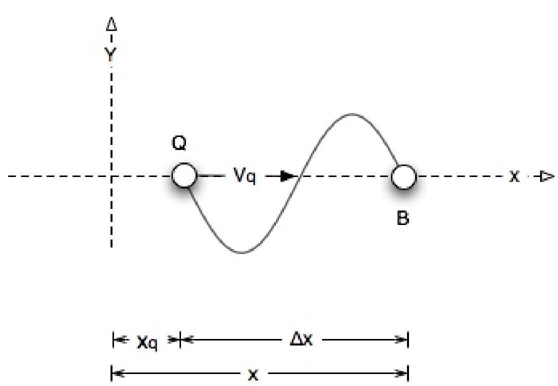
Die vom Beobachter gemessene Frequenz f_b ist direkt aus dieser Gleichung ablesbar:

$$f_b = f_q - \frac{v_b}{\lambda} = \frac{f_q\,(c - v_b)}{c}$$

Entfernt sich also der Beobachter von der Quelle ($v_b > 0$) so ist die gemessene Frequenz niedriger als die von der Quelle erzeugte. Ist $v_b = c$ so misst der Beobachter keine Schwingung ($f_b = 0$).

4.2 Bewegte Quellen

Betrachten wir nun den anderen Fall, in dem sich nämlich die Quelle im Medium bewegt. Der Beobachter sei dabei still.



Die Position x_q der Quelle sei gegeben durch $x_q = v_q t$. Die Position des Beobachters sei $x = const.$
Das von der Quelle erzeugte *Signal* sei gegeben durch $Y_q(t) = A\sin(\omega_q t)$ und das vom Beobachter gemessene Signal $Y_b(t)$. Der Zeitunterschied Δt zwischen einem von der Quelle am Zeitpunkt t abgesendeten *Impuls* und dessen Ankunft am Beobachter ist gegeben durch

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{(x - v_q t)}{c}$$

Das bedeutet:

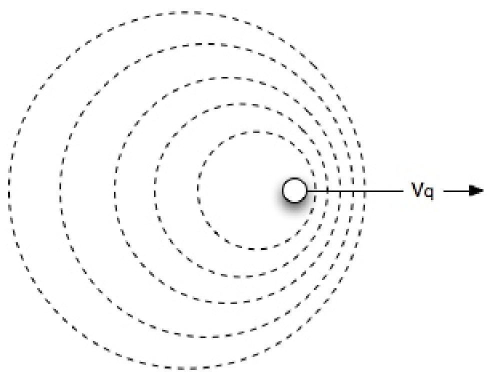
$$Y_b(t_b) = Y_b(t + \Delta t) = Y_q(t) = A\sin(\omega_q t)$$

$$\Rightarrow\ Y_b(t_b) = A\sin(\omega_b t_b + \phi) = A\sin\left[\omega_b\left(t + \frac{(x - v_q t)}{c}\right) + \phi\right] = A\sin(\omega_q t)$$

$$\Rightarrow\ \omega_b\left(1 - \frac{v_q}{c}\right) = \omega_q\ \wedge\ \phi = -\frac{\omega_b x}{c}$$

$$\Rightarrow\ f_b = \frac{c f_q}{(c - v_q)}$$

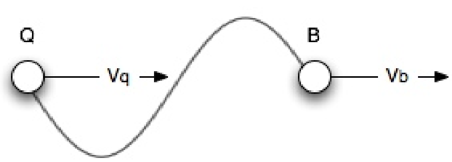
Nähert sich also die Quelle dem Beobachter an ($v_q > 0$), so ist die gemessene Frequenz höher als die von der Quelle erzeugte. Man kann sich die Wellenfronten etwa wie folgt vorstellen:



Für $v_q = c$ ist f_b theoretisch unendlich groß, es tritt der so-genannte *Überschallknall* auf!

4.3 Bewegte Quellen und Beobachter

Eigentlich nur eine Kombination der beiden vorherigen Fälle ist der Fall in dem sich Beobachter und Quelle beide im Medium fortbewegen.



Dabei teilen wir das Problem in zwei Teile ein. Gäbe es einen 2en, still-stehenden Beobachter, so würde er die Frequenz

$$f_{b_2} = \frac{c f_q}{(c - v_q)}$$

messen. Diesen Beobachter können wir aber auch als still-stehende Quelle betrachten! Das bedeutet also:

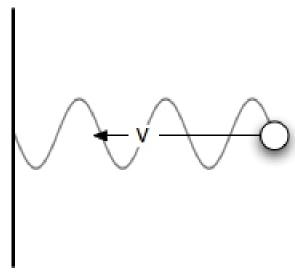
$$f_b = \frac{f_{b_2}(c - v_b)}{c} = f_q \cdot \frac{(c - v_b)}{(c - v_q)}$$

Bemerkenswert ist das wenn $v_b = v_q$ immer $f_b = f_q$ gilt! Dies ist unabhängig vom Medium und dessen Relativgeschwindigkeit!

5 Rechenbeispiele

5.1 Das experimentierlustige Raumschiff

Ein Raumschiff bewegt sich gegen eine Wand mit der konstanten Geschwindigkeit v und sendet dabei eine Welle der Frequenz f_0 aus. Diese wird von der Wand reflektiert und vom Raumschiff wieder empfangen.



a) Welche Frequenz f_e hat das im Raumschiff gemessene Echo?

b) Angenommen die Welle breitet sich mit einer konstanten Amplitude A aus, mit welcher Amplitude A' schwingt dann ein Teilchen T das sich zwischen Raumschiff und Wand im Abstand $d = \lambda/3$ von letzterer befindet? λ sei dabei die Wellenlänge der Welle im Medium. Falls eine Fall-Unterscheidung gemacht werden muss, ist diese anzugeben.

Lösung

a) Aufgrund der Bewegung des Rauschiffes hat die auf die Wand auffallende Welle eine Frequenz:

$$f_w = \frac{cf_0}{(c-v)}$$

Diese können wir aber wiederum als Quelle betrachten die eine Welle der Frequenz f_w aussendet. Dann ist die vom Raumschiff empfangene Frequenz:

$$f_r = \frac{f_w(c+v)}{c} = f_0 \cdot \frac{(c+v)}{(c-v)}$$

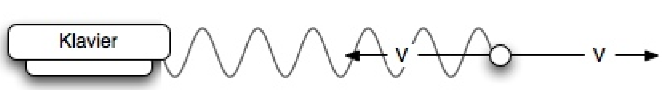
Beachte: Das Raumschiff <u>nähert</u> sich der Wand an, deshalb das ”+”Vorzeichen!

b) Es sind folgende Fallunterscheidungen zu machen.

- Die Welle ist noch nicht angekommen: Das Teilchen schwingt offensichtlich nicht.
- Die Welle jedoch nicht das Echo ist am Teilchen angekommen. Das Teilchen schwingt mit einer Amplitude A.
- Das Eccho ist am Teilchen angekommen. Echo und ursprüngliches Signal überlagern sich und erzeugen eine stehende Welle. Da die Wand als ein festes Ende”betrachtet werden kann ist die Amplitude für ein Teilchen im Abstand x von dieser gegeben durch
$$A'(x) = 2A \left| \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right|$$
Die Amplitude des Teilchens ist also:
$$A'\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right| = A\sqrt{3}$$

5.2 Das ”verrückte”Klavier

Mit welcher Geschwindigkeit v muss man sich einem Klavier nähern bzw. entfernen damit man ein auf dem Klavier spielendes Stück im ersten Fall eine Oktave höher als im zweiten Fall hört?



Lösung Eine Oktave höher bedeuted eine doppelte Frequenz f_n von f_e für jede beliebige im Klavier erzeugte Frequenz f. Also:

$$f_n = 2f_e \;\Rightarrow\; \frac{f(c+v)}{c} = 2\frac{f(c-v)}{c} \;\Rightarrow\; v = \frac{c}{3}$$