Trägheitsmoment - Eine andere Vorgehensweise

Stilianos Louca, Dezember 21, 2006
Friedrich Schiller Universität Jena.

Zuletzt geändert: Januar 20, 2007

Was dieser Artikel nicht ist.
Dieser Artikel hat nicht den Zweck zu erklären was der Trägheitsmoment ist oder wie er benutzt wird.
Ferner ist es auch kein Artikel der Mathe-kenntnisse ermittelt oder gar Theoreme herleitet.

Was dieser Artikel ist.
Dieser Artikel dient dazu Praxisorientierte Methoden zur Berechnung von simplen Trägheitsmomenten zu ermitteln.
Er wurde von einem Student für Studenten geschrieben und entspricht natürlich nicht dem Niveau einer Wissenschaftlichen Veröffentlichung. Er beschreibt einfach meine persönliche Vorgehensweise an das Problem und ich hoffe andere Studenten finden einen Nutzen aus dieser Arbeit.

Problem: Gegeben sei ein 3-D Körper bzw. dessen mathematische Beschreibung, sowie eine Umdrehungsachse. Zu finden sei der Trägheitsmoment dieses Körpers um die gegebene Achse.

Mögliche Lösungswege:

a) Trivialer Fall.
Man überprüfe ob der Fall Trivial ist.
Laut Definition ist der Trägheitsmoment J eines Massenpunktes **m** um eine Achse im Abstand **R** gleich:

$$J = m \cdot R^2$$

Hat man viele(eventuell albzählbare) Massenpunkte, so addieren sich die Trägheitsmomente einfach:

$$J = \sum m_i \cdot {R_i}^2$$

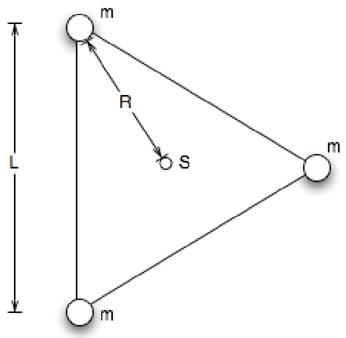
bzw.

$$J = \int dm \cdot R^2$$

Beispiel a1:
Ein Massepunkt **P** der Masse **m** soll sich um eine gerade im abstand **R** drehen. Gesucht ist der entsprechende Trägheitsmoment.

$$J = m \cdot R^2$$

Beispiel a2:
Drei Kugeln mit Masse **m** jeweils, befinden sich wie im Bild in so einer Anordnung dass jede Kugel von der anderen einen Abstand **L** hat. Der Radius der Kugeln ist vernachlässigbar klein und sie rotieren um deren gemeinsamen Schwerpunkt **S** senkrecht zur Ebene.
Die Kugeln können also als Massenpunkte aufgefasst werden.



Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt gilt:

$$R = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

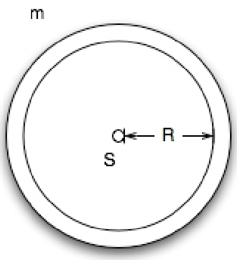
Der Trägheitsmoment jedes Massenpunktes ist:

$$J_i = m \cdot R^2 = \frac{m \cdot L^2}{3}$$

Also ist der gesamte Trägheitsmoment:

$$J = 3 \cdot J_i = m \cdot L^2$$

Beispiel a3:
Betrachten wir einen Ring mit dem Radius **R** dessen Masse **m** nur auf dem äußersten Umkreis verteilt ist(also sehr kleine Dicke)



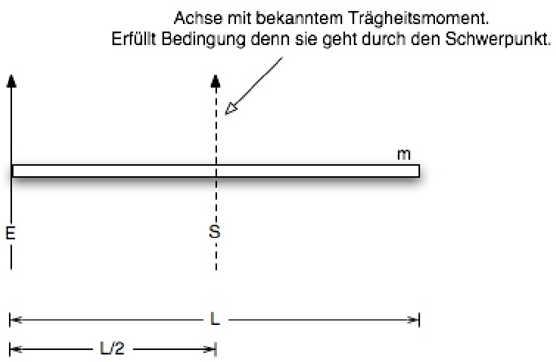
Da die gesamte Masse auf R verteilt ist gilt:

$$J = \sum m_i \cdot {R_i}^2 = m \cdot R^2$$

b) Steinerscher Satz.

Man prüfe ob sich der gesuchte Trägheitsmoment leicht mit Hilfe des Steinerschen Satzes von einem bekannten Trägheitsmoment um die "verschobene" Achse um den Schwerpunkt herleiten lässt.

Beispiel b1:
Betrachten wir einen Stab der Länge **L**, Masse **m** und vernachlässigbarer dicke.
Zu finden sei der Trägheitsmoment um die Achse **E** die senkrecht zum Stab durch eine seiner Ecken verläuft.



Der Trägheitsmoment um die Achse S sei bekannt:

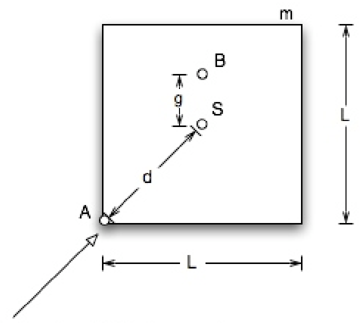
$$J_S = \frac{m \cdot L^2}{12}$$

Dann gilt:

$$J_E = J_S + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot L^2}{12} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot L^2}{3}$$

Beispiel b2:
Gegeben sei ein Viereck mit bekannter Masse **m** und Länge **L**.
Zu finden sei der Trägheitsmoment um die Achse **B** die in einem abstand **g** vom Schwerpunkt senkrecht zur Fläche liegt.
Außerdem bekannt sei der Trägheitsmoment um die Parallele Achse **A** die durch eine der Ecken geht.

$$J_A = \frac{2 \cdot m \cdot L^2}{3}$$



Achse mit bekanntem Trägheitsmoment.
Erfüllt Bedingung nicht denn sie geht nicht durch den Schwerpunkt.

Dann gilt:

$$J_A = J_S + m \cdot d^2,\ d = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow J_s = J_A - m \cdot \frac{L^2}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot m \cdot L^2}{3} - m \cdot \frac{L^2}{2}$$

$$= \frac{m \cdot L^2}{6}$$

Also haben wir jetzt den Trägheitsmoment um den Schwerpunkt S gefunden!
Somit gilt jetzt:

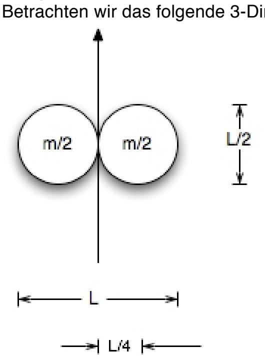
$$J_B = J_S + m \cdot g^2 = \frac{m \cdot L^2}{6} + m \cdot g^2$$

c) Finite Zerstückelung

Man prüfe ob das Objekt sich als Zusammensetzung von 2 oder mehr einfacheren Objekten darstellen lässt, deren Trägheitsmomente um die selbe Achse bekannt sind. Der gesamte Trägheitsmoment ist einfach die Summe aller partiellen Trägheitsmomente.

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i$$

Beispiel c1:
Betrachten wir das folgende 3-Dimensionale Objekt der masse **m**.



Man sieht dass es sich leicht als zwei Kugeln darstellen lässt, jede unabhängig von der anderen.
Der Trägheitsmoment einer Kugel um ihr Zentrum sei bekannt.

$$J_S = \frac{2 \cdot m \cdot R^2}{5},\ R = \frac{L}{4}$$
$$\Rightarrow J_S = \frac{m \cdot L^2}{40}$$

Sei jetzt der Trägheitsmoment einer Kugel um eine Tangente an ihrer Oberfläche. Nach Steinerschem Satz:

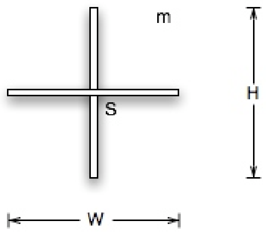
$$J_T = J_S + m \cdot R^2 = \frac{m \cdot L^2}{40} + m \cdot \frac{L^2}{16} = \frac{7 \cdot m \cdot L^2}{80}$$

Der gesamte Trägheitsmoment ergibt sich zu:

$$J = 2 \cdot J_T = \frac{7 \cdot m \cdot L^2}{40}$$

Beispiel c2:
Betrachten wir das Kreuz der Masse **m** dessen beide Stäbe eine vernachlässigbare dicke haben. Die masse ist jedoch entlang der Stäbe homogen

verteilt sein. Der Stab soll sich um seinen Geometrischen Mittelpunkt drehen, um die Achse die senkrecht zu den zwei Stäben liegt.



Man teile das Kreuz in 2 Stäbe auf.
Die masse Mv bzw. Mh des vertikalen bzw. horizontalen Stabes ist:

$$M_V = m \cdot \frac{H}{H+W}, \; M_h = m \cdot \frac{W}{H+W}$$

Die jeweiligen Trägheitsmomente der Stäbe um die Achse sind:

$$J_V = \frac{M_V \cdot H^2}{12} = \frac{m \cdot H^3}{12 \cdot (H+W)}$$

$$J_h = \frac{M_h \cdot W^2}{12} = \frac{m \cdot W^3}{12 \cdot (H+W)}$$

Daraus ergibt sich:

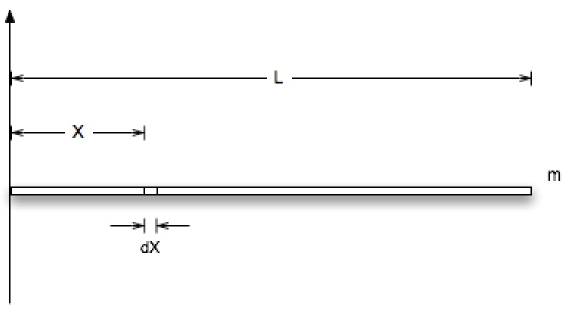
$$J = J_V + J_h = \frac{m \cdot \left(H^3 + W^3\right)}{12 \cdot (H+W)}$$

d) Infinite Zerstückelung(oder Scheibchen-Methode)

Das Prinzip ist das selbe wie im Schritt (c). Man zerlege das Objekt in Teil-Objekte deren Trägheitsmomente bekannt sind. Der Unterschied hier ist dass die Teile hier unendlich viele sind und einen unendlich kleinen Trägheitsmoment haben(Integrierung). Der gesamte Trägheitsmoment ist dann wider:

$$J = \sum^{\infty} Ji$$

Beispiel d1:
Gegeben ist ein langer und dünner(also vernachlässigbare Dicke) Stab mit einer Masse **M** und einer Länge **L**.
Der Stab soll um seine linke kante rotieren. Zu finden ist der Trägheitsmoment **J**.



Man stelle sich vor der Stab besteht aus **n** kleinen Massenteilchen deren Dimensionen so klein sind dass man sie als Massenpunkte betrachten kann. Deren Länge sei **Δx**.
Dann gilt:

$$\Delta m = \frac{\Delta x \cdot m}{L}$$

Der Trägheitsmoment eines solchen Teiles ist also:

$$\Delta J = \Delta m \cdot X^2 = \frac{\Delta X \cdot m}{L} \cdot X^2$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta J}{\Delta X} = \frac{m \cdot X^2}{L}$$

Geht man in eine unendlich feine Einteilung um, so ist:

$$\frac{dJ}{dX} = \frac{m \cdot X^2}{L} \;\; \Rightarrow \;\; J = \int_0^L \frac{m \cdot X^2}{L} \cdot dX$$

Dies kommt uns auch bekannt vor denn:

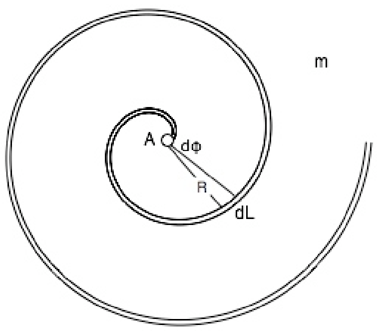
$$\int \frac{m \cdot X^2 \cdot dX}{L} = \int X^2 \cdot dm$$

Also folgt:

$$J = \frac{m}{L} \cdot \left[\frac{X^3}{3}\right]_0^L = \frac{m \cdot L^2}{3}$$

Beispiel d2:
Zu finden sei das Trägheitsmoment einer Archimedischen Spirale die um ihren Mittelpunkt A rotiert um die Achse senkrecht zu ihrer Fläche.
Bemerke: A ist nicht der Schwerpunkt!
Die Funktion die die Spirale beschreibt ist:

$$R = \alpha \cdot \phi \;\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \phi \cdot \cos(\phi) \\ \alpha \cdot \phi \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}, \;\alpha : const$$



Jedes bogenstück der Länge **dL** lässt sich also mit Hilfe seines entsprechenden Winkels **ϕ** beschreiben.
Für sehr kleine Stücke kann man annehmen dass es sich um ein Kreisbogenstück handelt. Die Länge **dL** und seine Masse **dm** ist dann:

$$dL = d\phi \cdot R = d\phi \cdot \phi \cdot \alpha, \;dm = \frac{dL \cdot m}{L} = \frac{m \cdot d\phi \cdot \phi \cdot \alpha}{L}$$

wobei **L** die Länge der Spirale. Der Trägheitsmoment **J** ist also:

$$J = \int_0^\Phi R^2 \cdot dm = \int_0^\Phi \frac{m \cdot \phi^3 \cdot \alpha^3 \cdot d\phi}{L} = \frac{m \cdot \alpha^3 \cdot \Phi^4}{4 \cdot L}$$

wobei Φ der maximale Winkel der Spirale. Die Länge L hängt jedoch genau von diesem Winkel ab.
Es gilt:

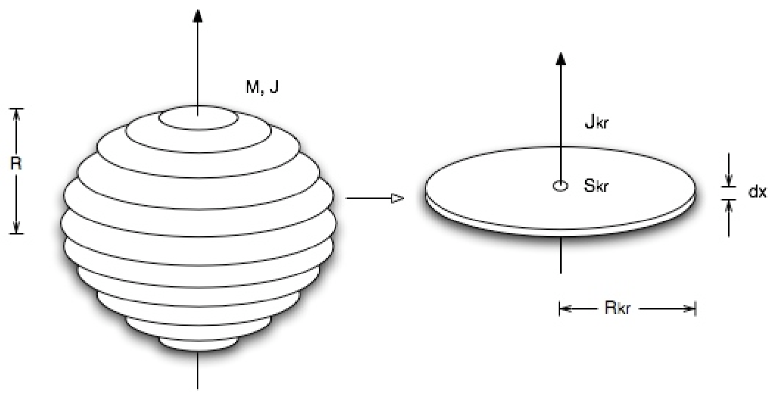
$$dL = d\phi \cdot \phi \cdot \alpha \Rightarrow L = \int_0^\Phi \phi \cdot \alpha \cdot d\phi = \frac{\alpha \cdot \Phi^2}{2}$$

Demzufolge:

$$J = \frac{m \cdot \alpha^3 \cdot \Phi^4}{4 \cdot \frac{\alpha \cdot \Phi^2}{2}} = \frac{m \cdot \alpha^2 \cdot \Phi^2}{2}$$

Beispiel d3:
Wir wollen das Trägheitsmoment einer Kugel der Masse **M** und Radius **R** um ihren Schwerpunkt berechnen.
Dazu teilen wir das Problem wie folgt auf.

a) Man stelle sich die Kugel als einen Stapel von unendlich vielen Kreisflächen vor. Jeder dieser Kreise hat eine Dicke **dx** und einen Radius **Rkr**.

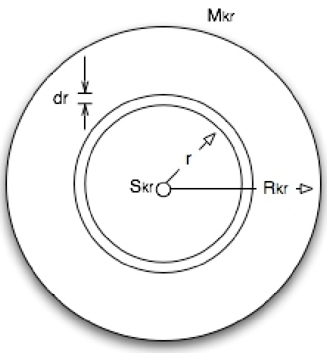


Demzufolge ist dann die Masse **Mkr** des Kreises:

$$M_{Kr} = M \cdot \frac{dx \cdot \pi \cdot {R_{Kr}}^2}{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}} = \frac{M \cdot 3 \cdot {R_{Kr}}^2}{4 \cdot R^3} \cdot dx$$

Beachte dass der Radius der Kreise Werte von 0 bis R annimmt.

b) Man berechne erst den generellen Trägheitsmoment **Jkr** einer Kreisfläche mit dem Radius **Rkr** die um deren Schwerpunkt **Skr** rotiert. Die rotations-Achse ist senkrecht zur Fläche!
Um diesen Trägheitsmoment auszurechnen teilen wir den Kreis wider auf. Nämlich in unendlich dünne konzentrische Ringe mit Radius **r** und Dicke **dr**. Beachte das diese Ringe sich alle um deren Schwerpunkt **Skr** drehen.



Die masse **dm** jedes Ringes ist:

$$dm = M_{Kr} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\pi \cdot {R_{Kr}}^2} = M_{Kr} \cdot \frac{2 \cdot r \cdot dr}{{R_{Kr}}^2}$$

Wie in Beispiel (a3) schon errechnet, ist der Trägheitsmoment **dJ** des Ringes.

$$dJ = dm \cdot r^2 = M_{Kr} \cdot \frac{2 \cdot r^3 \cdot dr}{{R_{Kr}}^2} = \frac{M_{Kr} \cdot 2 \cdot r^3}{{R_{Kr}}^2} \cdot dr$$

Bemerke dass er Abhängig davon ist welchen Ring wir betrachten(also von **r**).
Der gesamte Trägheitsmoment des Kreises ist dann einfach die Summe(oder Integral) aller Ring-Trägheitsmomente. Also:

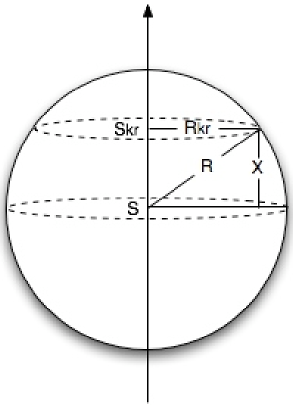
$$J_{Kr} = \sum dJ$$

$$\Rightarrow J_{Kr} = \int_0^{R_{Kr}} M_{Kr} \cdot \frac{2 \cdot r^3 \cdot dr}{{R_{Kr}}^2} = \frac{M_{Kr}}{2 \cdot {R_{Kr}}^2} \cdot \left[r^4\right]_0^{R_{Kr}} = \frac{M_{Kr} \cdot {R_{Kr}}^2}{2}$$

c) Jetzt wo wir den Trägheitsmoment jedes Kreises errechnet habe, können wir anfangen die Kreise in eine Kugel zusammenzustabeln. Dies klappt nur weil die Rotationsachse durch den Schwerpunkt von jedem Kreis geht.
Wir kennen außerdem die Masse der Kreise(abhängig von deren jeweiligen Radius).

$$\Rightarrow J_{Kr} = \frac{M_{Kr} \cdot {R_{Kr}}^2}{2} = \frac{M \cdot 3 \cdot {R_{Kr}}^4}{8 \cdot R^3} \cdot dx$$

Da aber der Radius der Kreise abhängig von **X** ist müssen wir einen Zusammenhang zwischen **Rkr** und **X** finden.



Aus dem Bild sehen wir dass:

$$X^2 + {R_{Kr}}^2 = R^2 \ \Rightarrow {R_{Kr}}^2 = R^2 - X^2$$

Also:

$$\Rightarrow dJ = J_{Kr} = \frac{M \cdot 3 \cdot \left(R^2 - X^2\right)^2}{8 \cdot R^3} \cdot dx$$

$$\Rightarrow J = \frac{M \cdot 3}{8 \cdot R^3} \cdot \int_{-R}^{R} \left(R^2 - X^2\right)^2 \cdot dx = \frac{M \cdot 3}{4 \cdot R^3} \cdot \int_{0}^{R} \left(R^2 - X^2\right)^2 \cdot dx$$

$$\Rightarrow J = \frac{M \cdot 3}{4 \cdot R^3} \cdot \left[X \cdot R^4 + \frac{X^5}{5} - \frac{2 \cdot R^2 \cdot X^3}{3}\right]_0^R = \frac{2 \cdot R^2}{5}$$

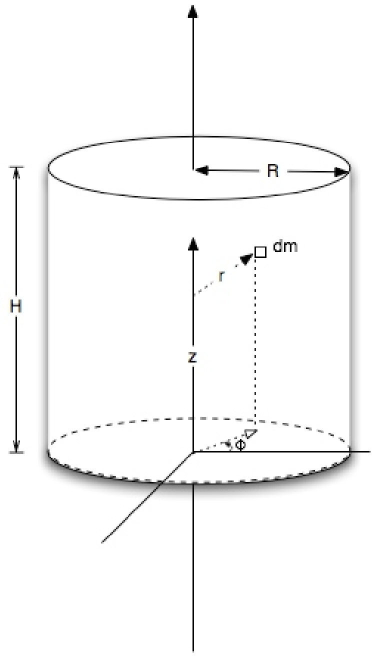
Generelle Regel:

Man schaut ob der Fall Trivial ist. Ist er es nicht, so teilt man das Problem in kleinere Probleme ein die man leichter lösen kann.
Handelt es sich um Fälle wie die Kugel in Beispiel (d2), so ist es meistens nötig das 3-Dimensionale Objekt(Kugel) erst in 2-Dimensionale Objekte (Scheibchen) einzuteilen(Kreise), und wiederum diese in eindimensionale Objekte(Ringe). Im Nachhinein baut man sich dann daraus sein eigentliches Objekt.

e) Mehrdimensionale Aufsummierung

Eigentlich eine Abkürzung der Infiniten Zerstückelung, ist die mehrdimensionale Aufsummierung von Massenelementen. Dabei versucht man eine generelle Darstellung(Masse und Abstand von der Achse) eines Massenelementes zu finden und diese Darstellung dann entsprechend durch alle möglichen werte laufen zu lassen.

Beispiel e1:
Betrachten wir einen Zylinder mit dem Radius **R**, der Höhe **H** und der Masse **m**, der um seine Symmetrie-Achse rotieren soll. Es macht sich am besten Zylinderkoordinaten zu verwenden da man so leicht den gesamten Zylinder in alle Richtungen unabhängig von einander abtasten kann.



Ein Massenelement **dm** wäre:

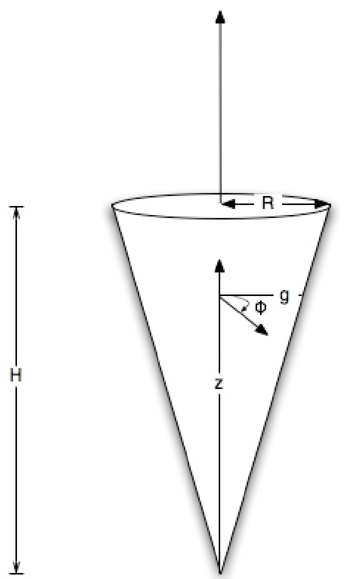
$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot r \cdot d\phi \cdot dz \cdot dr, \;\; \rho = \frac{m}{\pi R^2 H}$$

$$\Rightarrow J = \int_0^R \int_0^H \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \rho \cdot r \cdot d\phi \cdot dz \cdot dr$$

Die Grenzen bedeuten:
Summiere alle Massenelemente von der Höhe 0 bis H, im Winkel 0 bis 2π und im Abstand 0 bis R.

$$\Rightarrow J = 2\pi\rho \int_0^R \int_0^H r^3 \cdot dz \cdot dr = 2\pi\rho H \int_0^R r^3 \cdot dr = 2\pi\rho H \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

Beispiel e2:
Zu finden sei der Trägheitsmoment eines Kegels um seine Figurenachse.



Wir werden auch dieses mal Zylinderkoordinaten bevorzugen. Es geht natürlich auch anders(zum Beispiel mit Kugelkoordinaten).
Analog zu Beispiel e1:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot r \cdot d\phi \cdot dz \cdot dr,\ \ \rho = \frac{3m}{\pi R^2 H}$$

$$\Rightarrow J = \int_0^H \int_0^{g(z)} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \rho \cdot r \cdot d\phi \cdot dz \cdot dr,\ \ g(z) := \frac{z}{H} \cdot R$$

Beachte: Die Grenze **g** des mittleren Integrals ist abhängig von einer anderen Variablen, nämlich z! Solche Integrale müssen als erstes ausgerechnet werden, da ihr Wert ja immer noch eine Variable ist die dann noch abgetastet werden muss.

$$\Rightarrow J = 2\pi\rho \cdot \int_0^H \int_0^{z\frac{R}{H}} r^3 \cdot dr \cdot dz = \frac{2\pi\rho}{4} \cdot \int_0^H \left(z\frac{R}{H}\right)^4 \cdot dz = \frac{\pi\rho R^4}{2H^4} \cdot \frac{H^5}{5} = \frac{3mR^2}{10}$$