Der zentrale, elastische Stoß

Stilianos Louca

June 30, 2007

Contents

1 Einführung

1.1 Kurze Beschreibung des Problems

Dieser Artikel behandelt den elastischen, reibungsfreien Stoß zwischen zwei Starren, Kugelförmigen Körpern. Er wendet sich hauptsächlich an Studenten der Physik im ersten Fachsemester.

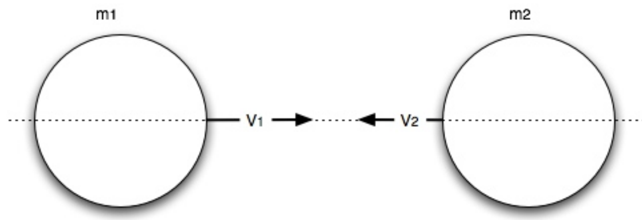
1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Der gerade, zentrale, elastische Stoß

2.1 Problemstellung

Betrachten wir zwei Kugeln der Masse m_1 und m_2. Diese zwei Massen bewegen sich mit den jeweiligen Geschwindigkeiten v_1 und v_2, so dass sie im Zeitpunkt $t = 0$ zentral und elastisch aufeinander stoßen, das bedeutet die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 liegen beide parallel zur Verbindungsgeraden der zwei Schwerpunkte.



Da das ganze auf einer Geraden stattfindet können wir uns auf die Beträge der normalerweise vektoriellen Größen beschränken. Gesucht sind die Endgeschwindigkeiten u_1 und u_2 der beiden Körper nach dem Stoß.

2.2 Erhaltungssätze

Da der Stoß elastisch verlaufen soll, bleibt die gesamte Energie E des Systems erhalten. Es gilt also:

$$E = \frac{v_1^2 m_1}{2} + \frac{v_2^2 m_2}{2} = \frac{u_1^2 m_1}{2} + \frac{u_2^2 m_2}{2} = const$$

$$\Rightarrow v_1^2 m_1 + v_2^2 m_2 = u_1^2 m_1 + u_2^2 m_2$$

Es gilt außerdem der Impulserhaltungssatz:

$$P = v_1 m_1 + v_2 m_2 = u_1 m_1 + u_2 m_2 = const$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{m_1(v_1 - u_1) + m_2 v_2}{m_2}$$

2.3 Lösen des Gleichungssystemes

Zu lösen wäre jetzt einfach das Gleichungssystem. Einsetzen der 2en Gleichung in die erste ergibt:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \cdot \left[\frac{m_1(v_1 - u_1) + m_2 v_2}{m_2}\right]^2$$
$$\Rightarrow u_1^2(m_1 + m_2) - 2u_1(v_1 m_1 + m_2 v_2) - \left[v_1^2(m_2 - m_1) - 2v_1 v_2 m_2\right] = 0$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung ergibt zwei Lösungen:

$$u_1 = \frac{(v_1 m_1 + v_2 m_2) \pm m_2(v_2 - v_1)}{(m_1 + m_2)}$$

Eine der beiden Lösungen liefert natürlich $u_1 = v_1$ was dem Anfangszustand entspricht. Die andere lautet:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2v_2 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Da die beiden Körper *gleichberechtigt* waren, kann man aufgrund von Symmetriegründen erkennen:

$$u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2v_1 m_1}{(m_1 + m_2)}$$

2.4 Spezialfälle

Man sieht aus der Gleichung was passiert wenn $u_2 = 0$ und m_2 zu unendlich geht, wie es zum Beispiel bei einer Wand[1] die mit einem Fussball kollidiert der Fall ist:

$$\lim_{m_2 \to \infty} u_1 = -v_1, \ \lim_{m_2 \to \infty} u_2 = 0$$

Der Fußball springt also einfach mit der gleichen Geschwindigkeit zurück wobei sich die Wand nicht rürt!
Wäre $v_1 = 0, v_2 \neq 0$ dann:

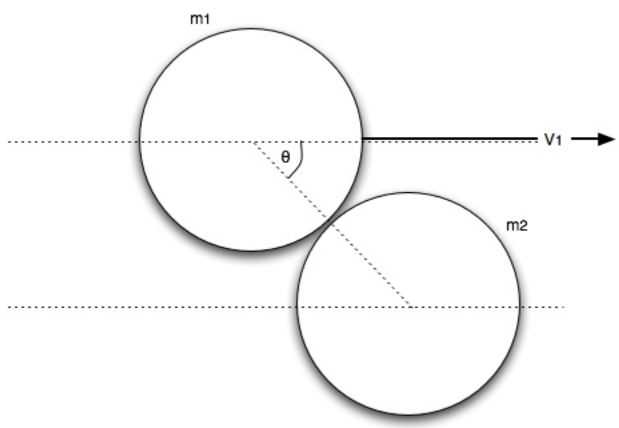
$$\lim_{m_2 \to \infty} u_1 = 2v_2, \ \lim_{m_2 \to \infty} u_2 = v_2$$

Kollidiert also ein LKW elastisch mit einer still-fliegenden Fliege, so fliegt diese maximal mit der doppelten Geschwindigkeit nach vorne. Der LKW merkt natürlich nichts!

3 Der schiefe, zentrale, elastische Stoß

3.1 Problemstellung

Wir wollen jetzt einen generelleren Fall betrachten: Den schiefen, zentralen, elastischen Stoß. Dabei wählen wir unser Bezugssystem so dass der zweite Körper m_2 im Koordinatenursprung und in Ruhe ist, und der erste Körper sich parallel zur X-Achse bewegt. Der Stoßwinkel θ ergibt sich dann wie im folgenden Bild:



3.2 Erhaltungssätze

Da alle Wechselwirkungen in der Ebene stattfinden müssen wir uns nur mit zwei Dimensionen auseinandersetzen. Wir werden von nun an im Impulsraum arbeiten. Das bedeutet, die Koordinaten bzw. Vektoren im Raum geben Impulse an. Analog wie vorhin gelten auch hier der Impuls- und Energieerhaltungssatz:

$$\vec{P} = m_1\vec{v_1} = \vec{\rho_1} + \vec{\rho_2} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = const, \ \ \vec{\rho_1} =: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{\rho_2} =: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \ : \ die\ neuen\ Impulse$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = P - x_1, \ y_2 = -y_1$$

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P^2}{2m_1} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{\rho_1^2}{2m_1} + \frac{\rho_2^2}{2m_2} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2m_1} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2m_2} = const$$

[1] Die Wand bzw. die Erde ist zwar nicht unendlich groß doch im Gegensatz zu einem Fußball sind $5.98 \cdot 10^{24} Kg$ schon genug

3.3 Lösen des Gleichungssystems

Ersetzen von x_1 und y_1 in der Energiegleichung liefert:

$$x_2^2(m_1 + m_2) + y_2^2(m_1 + m_2) - 2Px_2m_2 = 0,$$

$$P = m_1v_1 \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - \frac{2m_1m_2v_1x_2}{(m_1 + m_2)} = 0$$

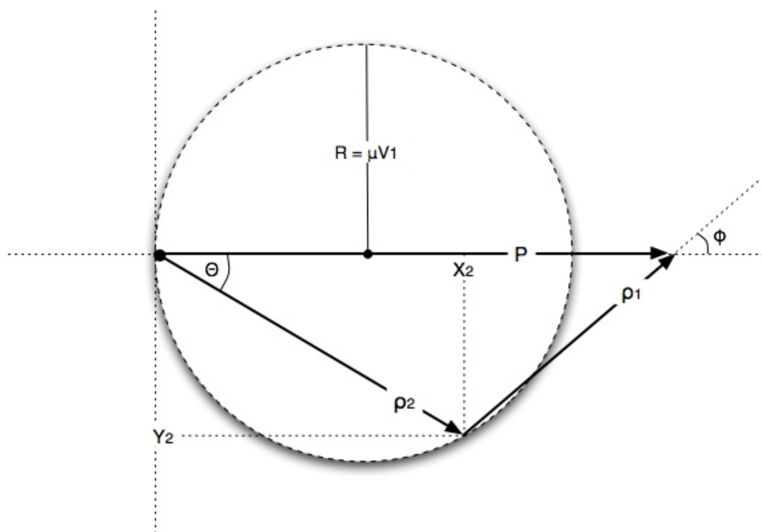
$$\mu := \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)} \ : \ die\ Reduzierte\ Masse,$$

$$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - 2v_1\mu x_2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_2 - v_1\mu)^2 + y_2^2 = (v_1\mu)^2$$

3.4 Der Stoßkreis

Letzterer Ausdruck beschreibt einen Kreis mit einem Radius $R = v_1\mu$ und dem Zentrum in $(v_1\mu, 0)$. Der Impulsvektor $\vec{\rho_2}$ des zweiten Körpers liegt also immer auf einem Kreis! Je nach Stoßwinkel kann jedoch die Richtung[2] und der Betrag variieren. Der Impulsvektor $\vec{\rho_1}$ des ersten Körpers ist dann das *Komplement* von $\vec{\rho_2}$ zu $\vec{P}$, das heisst $\vec{\rho_1} = \vec{P} - \vec{\rho_2}$.



[2]Die Abstoßrichtung ist parallel zur Verbindungsachse der beiden Körper bzw. senkrecht zur Berührungsfläche(also im Winkel θ), da parallel zu dieser kein Stoß stattfindet!

Der Winkel ϕ ist der Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens. Weiterrechnen führt zu:

$$y_2 = \tan(\theta) \cdot x_2, \ (x_2 - R)^2 + y_2^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (x_2 - R)^2 + \tan^2(\theta) \cdot x_2^2 = R^2 \Rightarrow \frac{x_2^2}{\cos^2(\theta)} - 2Rx_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{(2R \pm 2R) \cdot \cos^2(\theta)}{2} \Rightarrow x_2 = 2R\cos^2(\theta) = \frac{2v_1 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow u_{2x} = \frac{2v_1 m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow u_{2y} = \tan(\theta) \cdot u_{2x} = \frac{v_1 m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \sin(2\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{u_2} = \frac{v_1 m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos^2(\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u_1} = \frac{\vec{P} - \vec{\rho_2}}{m_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{v_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos^2(\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

3.5 Spezialfälle

Fall 1: $\theta = 0$

Der Fall geht in den geraden, zentralen Stoß über, es ist also:

$$\vec{u_1} = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \frac{2v_1 m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Fall 2: $m_2 \to \infty$

Der stoßende Körper stoßt gegen eine unendlich schwere Masse unter dem Winkel θ. Da m_2 unendlich groß ist kommt man auf das Reflektionsgesetz:

$$\lim_{m_2 \to \infty} \vec{u_1} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2(\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix}, \ \lim_{m_2 \to \infty} \vec{u_2} = 0$$

Fall 3: $m_1 = m_2 =: m$

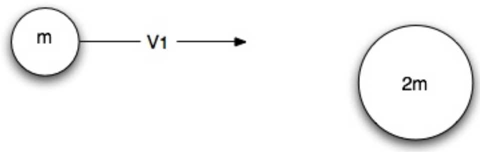
Bei gleichen Massen ergibt sich:

$$\vec{u_1} = \frac{v_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 - 2\cos^2(\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \frac{v_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos^2(\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

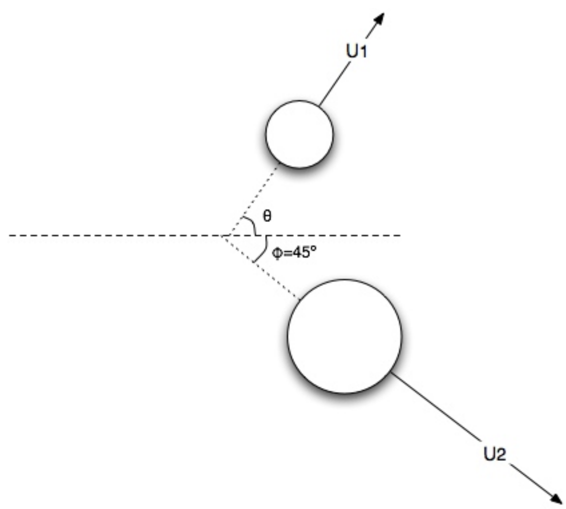
4 Problembeispiel

4.1 Problemstellung

Ein Proton (Masse m) bewegt sich mit der Geschwindigkeit V_1 und stößt völlig elastisch mit einem ruhenden Deuteron (Kern aus Proton + Neutron, Masse $2m$) zusammen.



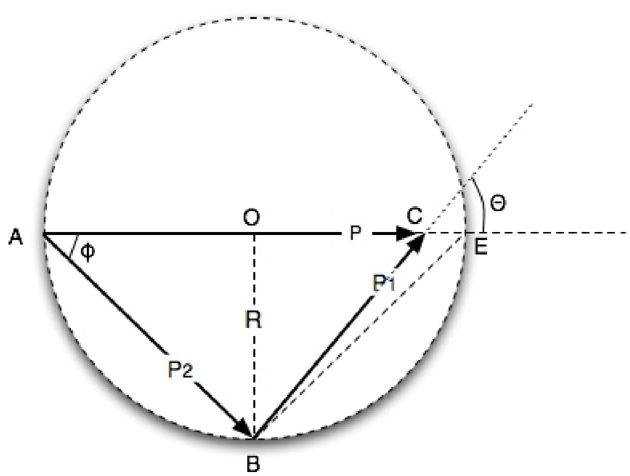
Nach dem Stoß fliegt das Deuteron unter einem Winkel von $\phi = \frac{\pi}{4}$ gegen v_1.



Zu bestimmen sind der Ablenkwinkel θ des Protons und die Endgeschwindigkeiten u_1, u_2 von Proton und Deuteron.

4.2 Lösung

Es handelt sich hier um einen schiefen zentralen Stoß. Zuerst basteln wir uns unseren Stoßkreis:



Wir wissen das der Impulsvektor $\vec{P_2}$ des Deuterons sich auf einem Kreis befindet. Der Radius R dieses Kreises ist $R = \mu v_1$. Es gilt:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{2}{3} \cdot m$$

$$\Rightarrow R = v_1 \mu = \frac{2}{3} \cdot P, \; P = v_1 m : der \; Gesamtimpuls.$$

$$\widehat{ABE} = \frac{\pi}{2}, \; \widehat{OAB} = \phi = \frac{\pi}{4} \; \Rightarrow \widehat{OEB} = \frac{\pi}{4} \; \Rightarrow \overline{AB} = P_2 = \overline{BE} \; \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{AE}$$

$$\Rightarrow P_2 = \sqrt{\overline{AO}^2 + R^2} = R \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot P$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot v_1$$

$$\theta = \arctan(\frac{R}{\overline{OC}}) = \arctan(\frac{R}{P - R}) = \arctan(\frac{\frac{2P}{3}}{P - \frac{2P}{3}}) = \arctan(2)$$

$$P_1 = \frac{R}{\sin(\theta)} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2(\theta)}} = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\theta)}} = R \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{v_1 m \sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{v_1 \sqrt{5}}{3}$$