Die harmonische Schwingung

Stilianos Louca

June 30, 2007

Contents

1 Einführung

1.1 Kurze Beschreibung des Problems

Dieser Artikel behandelt sowohl die freie, ungedämpfte und gedämpft, als auch die erzwungene, ungedämpfte und gedämpfte harmonische Schwingung. Die Behandlung erfolgt hauptsächlich von mathematischer Betrachtung aus. Grunderfahrungen mit linearen Differenzialgleichungen 2er Ordnung werden vorrausgesetzt. Der Artikel wendet sich hauptsächlich an Studenten der Physik im ersten Fachsemester.

1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

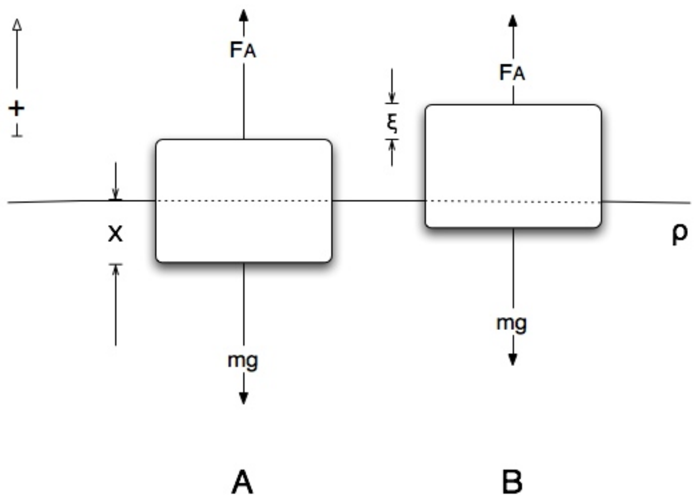
2 Die freie, ungedämpfte, harmonische Schwingung

2.1 Beschreibung

Ein sich periodisch veränderndes System (z.b. Mechanisches, Elektrisches) in dem die *rücktreibende Kraft*[1] immer linear jedoch in entgegengesetzter Richtung von der Abweichung vom Gleichgewichtszustand abhängt wird als ein harmonischer Schwinger bezeichnet. Eine Schwingende, ideale, reibungsfreie, masselose Feder mit einer angehängten Masse M ist ein Harmonischer Schwinger. Ein Physikalisches Pendel ist im generellen[2] kein harmonischer Schwinger da die rücktreibende Kraft nicht genau linear von der Abweichung vom Gleichgewichtspunkt abhängt.

2.2 Beispiel: Der schwimmende Schwinger

Im folgenden Bild wird ein in Wasser (Dichte ρ) schwimmender, starrer Körper mit der horizontalen Querschnittfläche A und der Masse m dargestellt.



Wir wollen seine Bewegungsgleichung aufstellen. Reibungen werden vernachlässigt. Im Gleichgewichtszustand (Bild A) wirkt eine Gewichtskraft $F_G = -mg$ und eine Auftriebskraft $F_A = AX\rho g$. Da wir von Gleichgewicht sprechen gilt:

$$\sum F = F_G + F_A = -mg + XA\rho g = 0$$

Bei einer Abweichung ξ gilt analog:

$$\sum F = F_G + F_A = -mg + (X - \xi)A\rho g = -\xi A\rho g$$

$$\Rightarrow \ddot{\xi} = -\xi \frac{A\rho g}{m}$$

Die rücktreibende Kraft ist offensichtlich proportional zur Abweichung ξ. Laut unserer Definition beschreibt ξ eine harmonische Schwingung[3]. Wir werden gleich sehen dass die zeitliche Funktion von ξ wie folgt aussieht:

$$\xi = \xi_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$

wobei $\omega = \sqrt{A\rho g/m}$ die so-genannte *Kreisfrequenz* und $T = 2\pi/\omega$ die *Periodendauer* ist.

2.3 Lösen der Bewegungsgleichung

Die obere Differenzialgleichung taucht in allen freien, ungedämften, harmonischen Schwingungen auf, mann muss es oft nur gut erkennen können. Wir wollen uns jetzt mit der Lösung solch einer Gleichung beschäftigen:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \ \omega > 0 : const$$

[1]Hier ist von einer *generellen Kraft* die Rede, im Sinne einer Wirkung die den Zustand des Systems zu verändern vermag, wie z.b. eine elektrische Spannung

[2]Für kleine Ausweichunken kann man jedoch von einem harmonischen Schwinger reden

[3]Insofern natürlich Energie im System steckt

Man sieht sofort den Zusammenhang zwischen dieser generellen Form und der vorigen in Abschnitt 2.2:

$$\omega^2 \equiv \frac{A\rho g}{m}$$

Die Lösung erfolgt über den Ansatz:

$$x = e^{\lambda t}$$

Ableiten und Einsetzten bring:

$$\lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = (C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t),\ C_1, C_2 : const$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),\ A := C_1 + C_2,\ B := i(C_1 - C_2)$$

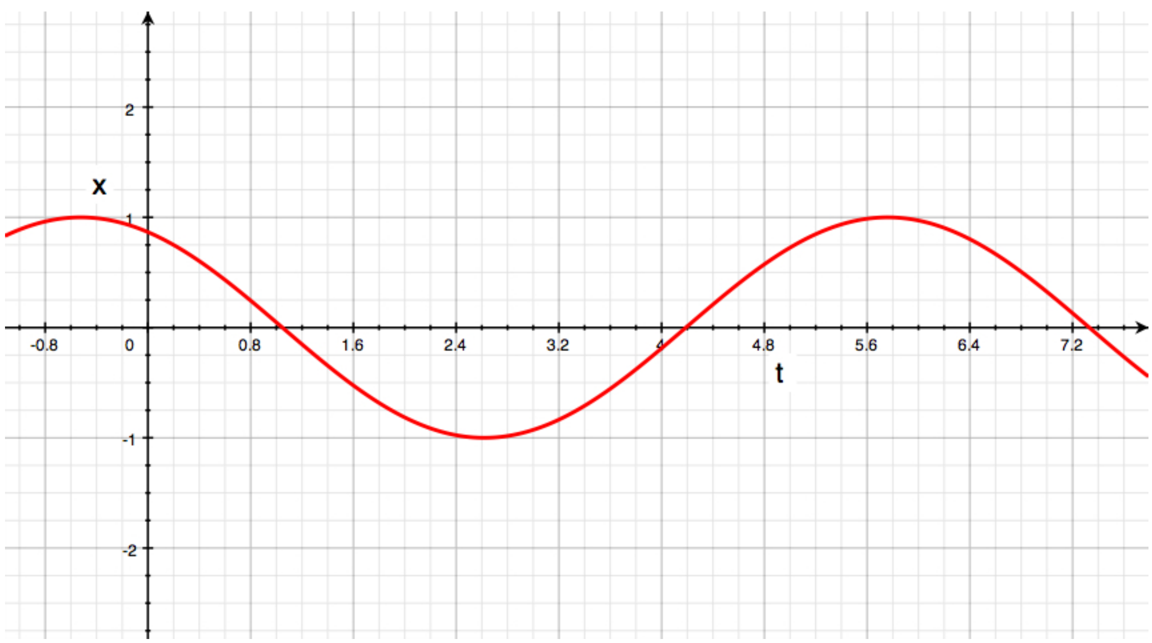
$$Setzen\ \phi_0, X_0 \in \mathbb{R} : X_0\cos(\phi_0) = A,\ X_0\sin(\phi_0) = B$$

$$\Rightarrow x = X_0\cos(\phi_0)\cos(\omega t) + X_0\sin(\phi_0)\sin(\omega t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$

X_0 und ϕ_0 sind unser System beschreibende Konstanten, die je nach Anfangsbedingungen variieren können.

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt diese Zeitfunktion dar, für folgende Bedingungen:

$$\omega = 1s^{-1},\ \phi_0 = \frac{\pi}{6},\ X_0 = 1\ Einheit$$



3 Die freie, gedämpfte, harmonische Schwingung

3.1 Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

In den meisten Fällen erfolgen Schwingung nie ungedm̈pft, das heisst ein Schwingendes System hat immer Energieverluste, die meistens in Form von Wärmeumwandlung erfolgen. Wir wollen den einfachen Fall betrachten wo wir eine Geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft haben:

$$F_R = \delta \dot{x}$$

Dann sieht unsere Gleichung wie folgt aus:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3.2 Lösen der Differentialgleichung

Das Lösen erfolgt auch hier über den e-ansatz.

$$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 - 4\omega_0^2},\ \gamma := \frac{\delta}{2}$$

3.2.1 Fall 1: Unterkritische Dämpfung

Ist der Reibungsfaktor δ klein genug ($\delta < 2\omega_0$), so dass immer noch eine Schwingung stattfinden kann, so nennt man die Schwingung *unterkritisch* gedämpft.

$$\Omega := \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm i\Omega$$

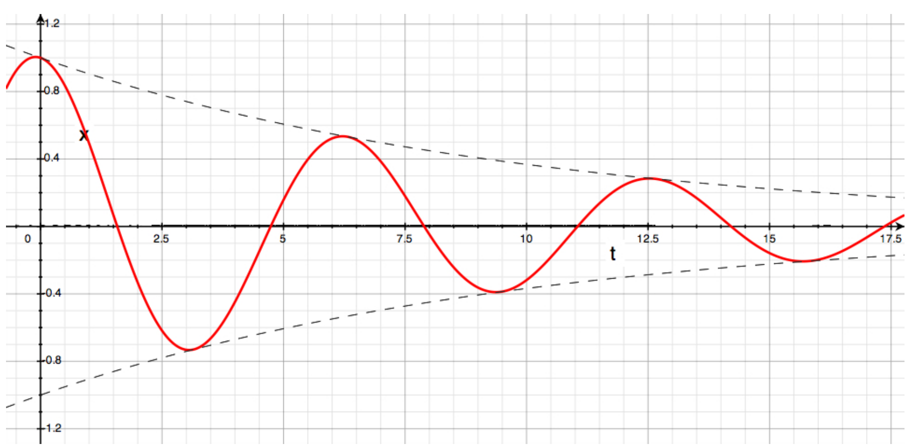
$$\Rightarrow x = e^{-\gamma t} \cdot \left[C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right] = X_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\Omega t + \phi_0),\ C_1, C_2, X_0, \phi_0 : const$$

Die Amplitude der resultierenden Schwingung nimmt also exponentiell ab. Die Frequenz ist etwas kleiner als die ursprüngliche Eigenfrequenz:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt diese Zeitfunktion dar, für folgende Bedingungen:

$$\omega = 1s^{-1},\ \dot{x}(0) = 0,\ \gamma = 0.1s^{-1},\ X_0 = 1\ Einheit$$



3.2.2 Fall 2: Überkritische Dämpfung

Bei zu großer Dämpfung ($\delta > 2\omega_0$) geht die Schwingung in den so genannten *Kriechfall* über (überkritische Dämpfung). Es erfolgt kein Schwingung mehr, der Schwinger *kriecht* nur noch bis zum Gleichgewichtspunkt.

$$\Omega := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \Omega$$

$$\Rightarrow x = e^{-\gamma t} \cdot \left[C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}\right] = e^{-\gamma t} \cdot \left[A \cosh(\Omega t) + B \sinh(\Omega t)\right],\ C_1, C_2 : const,\ A := C_1 + C_2,\ B := C_1 - C_2$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt diese Zeitfunktion dar, für folgende Bedingungen:

$$\omega = 1s^{-1},\ \dot{x}(0) = 0,\ \gamma = 2s^{-1},\ X_0 = 1\ Einheit$$

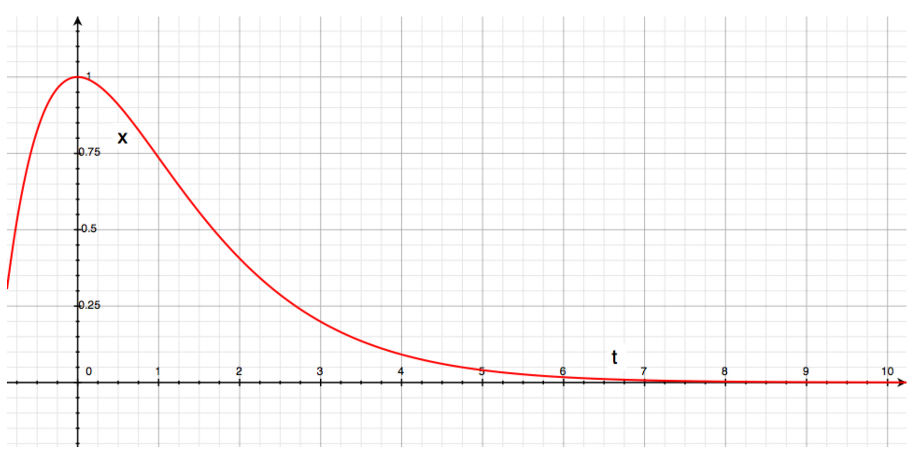
3.2.3 Fall 3: Der aperiodische Grenzfall

Bei genau einem bestimmten Dämpfungsfaktor $\delta = 2\omega_0$ geht der Oszillator in den so genannten *aperiotischen Grenzfall* über. Die Rückkehr in den Gleichgewichtszustand findet innerhalb von minimal kurzer Zeit statt.

$$\lambda = -\gamma \Rightarrow x = (C_1 + C_2 \cdot t)e^{-\gamma t}$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt diese Zeitfunktion dar, für folgende Bedingungen:

$$\omega = 1s^{-1},\ \dot{x}(0) = 0,\ \gamma = 2\omega = 2s^{-1},\ X_0 = 1\ Einheit$$



4 Die erzwungene, ungedämpfte, harmonische Schwingung

4.1 Äußere Erregung

Man stelle sich jetzt vor unserer Oszillator wird von einer äußeren, periodisch verlaufenden Kraft angeregt. Unter gewissen Bedingungen findet ein Energiezufluss statt, der den Oszillator entweder unendlich zu schwingen vermag, oder ihn gar nach endlicher zeit zerstört! Um das ganze einfach zu halten, behandeln wir den Fall wo die äußere Erregung $f(t)$ bzw. Kraft $F(t)$ auch eine harmonische Schwingung der Zeit darstellt. Ihre Frequenz, die so-genannte *Erregerfrequenz* sei $\omega/2\pi$. Unsere Bewegungsgleichung lautet also:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Beachte: Der Faktor f_0 stellt eine Amplitude der äußeren Erregung dar. Beim Wasserschwinger zum Beispiel wäre es dann $f_0 = \frac{F_0}{m}$ wobei F_0 eine Kraft-Amplitude wäre und f_0 eine Beschleunigungs-Amplitude.

4.2 Lösen der Differentialgleichung

Analog zu vorhing wird auch hier der e-Ansatz verwendet. Doch beachte: Es handelt sich hier nicht um eine homogene DGL. Um sie zu lösen müssen wir also eine Lösung für den homogene *Anteil* $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ finden und dazu noch eine partikuläre Lösung der gesamten DGL addieren. Die Summe der beiden Lösungen ist dann die allgemeine Lösung.

$$Homogene: \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),\ A, B: const$$

$$Partikuläre: \ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)\ \rightarrow Ansatz:\ x_p = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_p = -\omega^2\alpha\cos(\omega t) - \omega^2\beta\sin(\omega t)\ \Rightarrow -\omega^2\alpha\cos(\omega t) - \omega^2\beta\sin(\omega t) + \omega_0^2\left[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right] = f_0\cos(\omega t)$$

$$Komponentenvergleich: \rightarrow \beta\cdot(\omega_0^2 - \omega^2) = 0\ \wedge\ \alpha\cdot(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0\ \Rightarrow \beta = 0\ \wedge\ \alpha = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cdot\cos(\omega t)$$

Bemerkungen: Für $\omega \rightarrow \infty$ geht der Einfluss der Erregung $f(t)$ zu Null. Für $\omega = \omega_0$ gibts Probleme! Man spricht dabei von einer *Resonanzkatastrophe* Wir wollen zunächst ein Paar Anfangsbedingungen fordern um das ganze zu vereinfachen:

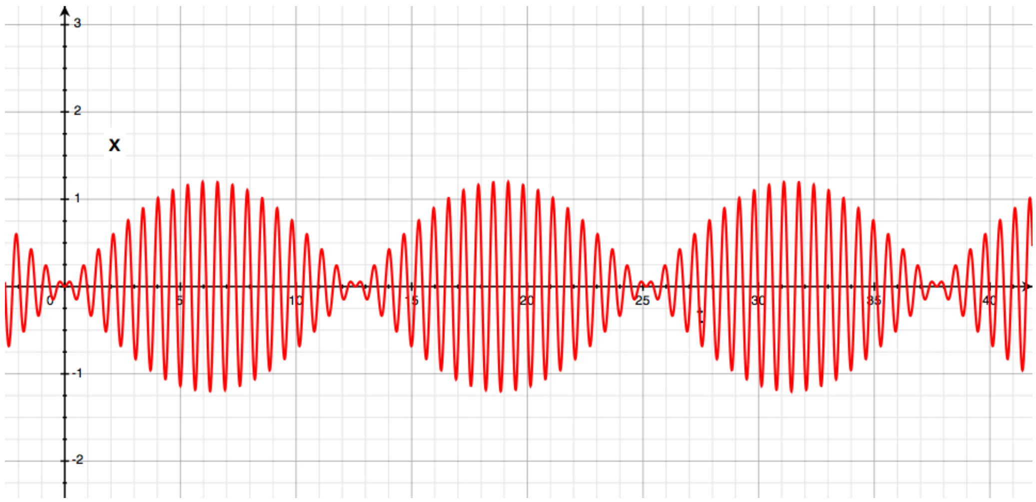
$$x(0) \stackrel{!}{=} 0\ \wedge\ \dot{x}(0) \stackrel{!}{=} 0\ \Rightarrow A = -\frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\ \wedge\ B = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cdot\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{2f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cdot\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

Für $\omega_0 \approx \omega,\ \omega \neq \omega_0$ stellt diese Zeitliche Funktion eine so genannte *Schwebung* dar. Dabei ändert sich die Amplitude der Schwingung periodisch.

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt diese Zeitfunktion dar, für folgende Bedingungen:

$$\omega_0 = 10s^{-1}, \omega = 0.95\omega_0,\ f_0 = 0.3\frac{Einh.}{s^2}$$



4.3 Resonanz

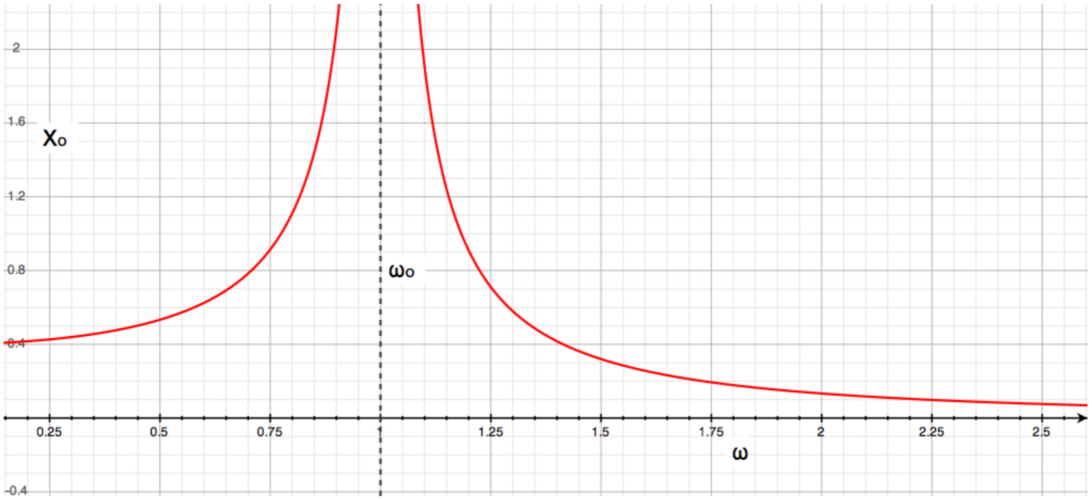
Resonanz tritt auf wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ist. Es wird ständig mehr Energie ins system hinzugefügt so dass am Ende die steigende Amplitude den Oszillator zerstört!

$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{2f_0}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Man sieht: Im Falle einer Resonanz geht die Amplitude mit der Zeit zu Unendlich!

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt die maximale Amplitude der Schwingung für verschiedene Erregerfrequenzen dar.

$$\omega_0 = 1s^{-1},\ f_0 = 0.2\frac{Einh.}{s^2}$$



5 Die erzwungene, gedämpfte, harmonische Schwingung

Man stelle sich jetzt außer einer Erregerkraft eine dämpfende *Kraft* vor, deren Wirkung (z.b. bewirkte Beschleunigung) analog zu Kap. 3 proportional zur Änderungsgeschwindigkeit $\dot{x}$ ist, das heisst:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Ein Beispiel wäre ein realer Federschwinger mit einer Federkonstante K, einer Masse m, einer Erregerkraft $F = F_0 \cos(\omega t)$ und einem Reibungsfaktor β:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

5.1 Lösen der Differenzialgleichung

Analog zu vorhing ist die generelle Lösung die Lösung der homogenen DGL plus eine partikuläre Lösung. Wir wollen uns auß]erdem nur mit dem unterkritisch gedämpften Fall beschäftigen. Die anderen beiden sind analog. Die homogene Lösung spielt am Ende sowieso keine wichtig Rolle da diese *urprüngliche* Schwingung aufgrund der Dämpfung schnell zu Null geht. Also:

$$Homogene : \ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ \rightarrow x_h = e^{-\gamma t} \cdot [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] = e^{-\gamma t} X_0 \cos(\Omega t + \phi_0)$$

$$X_0, \phi_0 : const, \ \Omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \ \gamma := \frac{\delta}{2}$$

$$Partikul\ddot{a}re : \ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t) \rightarrow \ Ansatz : x_p = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\omega a \sin(\omega t) + \omega\beta\cos(\omega t) \ \wedge \ \ddot{x} = -\omega^2\alpha\cos(\omega t) - \omega^2\beta\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \left[-\omega^2\alpha\cos(\omega t) - \omega^2\beta\sin(\omega t)\right] + \delta\left[-\omega a \sin(\omega t) + \omega\beta\cos(\omega t)\right] + \omega_0^2\left[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right] = f_0\cos(\omega t)$$

$$Komponentenvergleich : \rightarrow \left(\omega_0^2\beta - \omega^2\beta - \delta\omega\alpha\right) = 0 \ \wedge \ \left(\omega_0^2\alpha - \omega^2\alpha + \delta\omega\beta\right) = f_0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\delta\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \ \Rightarrow \beta = \frac{\delta\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \delta\omega\sin(\omega t)\right]$$

Diese Lösung stellt natürlich eine Schwingung dar:

$$x_p \stackrel{!}{=} \zeta \cdot [\cos(\theta)\cos(\omega t) + \sin(\theta)\sin(\omega t)]$$

$$Komponentenvergleich : \rightarrow \alpha = \zeta\cos(\theta) \ \wedge \ \beta = \zeta\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \ \wedge \ (\alpha^2 + \beta^2) = [\zeta^2\cos^2(\theta) + \zeta^2\sin^2(\theta)] = \zeta^2$$

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}} \ \wedge \ \theta = \arctan\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow \ x_p = \zeta\cos(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow x = x_h + x_p = e^{-\gamma t} X_0 \cos(\Omega t + \phi_0) + \zeta\cos(\omega t + \theta)$$

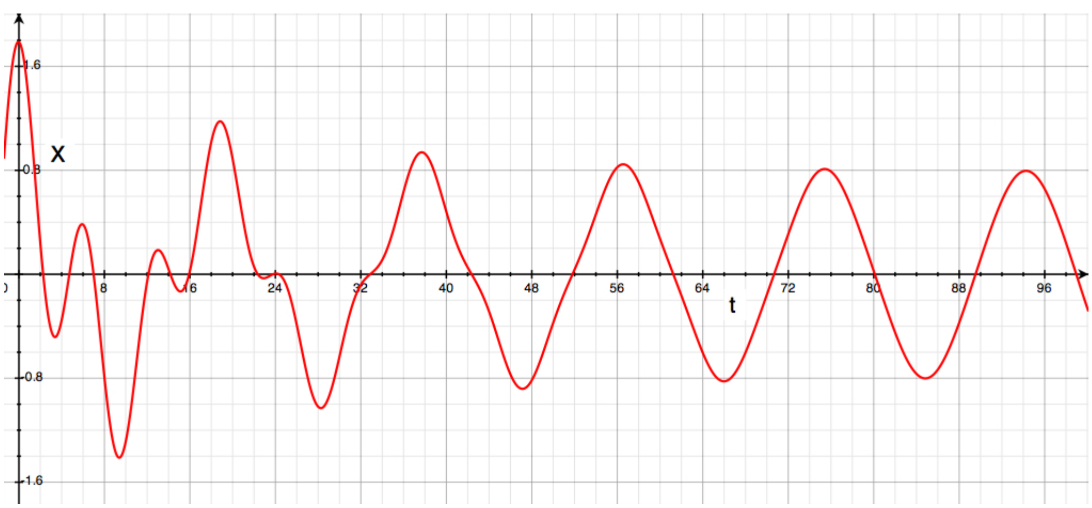
Man sieht aus der letzten Gleichung dass die Amplitude ζ dieser Erregten Schwingung von der Erregerfrequenz abhängt jedoch nicht von der Zeit. Nach gewisser Zeit, geht außerdem die Amplitude der ursprünglichen Schwingung $x_h(t)$ zu Null und das System geht in eine normale Schwingung mit konstanter Amplitude (ζ) über:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$$

Bemerke: Geht $\omega \rightarrow 0$ dann ist $\zeta = f_0/\omega_0^2$.

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt den Verlauf der oberen Schwingung zur Zeit dar:

$$\omega_0 = 1s^{-1}, \ f_0 = 0.7\ \frac{Einh.}{s^2}, \ \omega = \frac{\omega_0}{3}, \ \gamma = \frac{\delta}{2} = 0.05s^{-1}, \ X_0 = 1\ Einh., \ \phi_0 = 0$$



5.2 Resonanz

Obwohl man schon erkennen kann dass bei dieser Art von Schwingung keine eigentliche Resonanzkatastrophe auftreten kann[4], lohnt es sich nach einer maximalen Amplitude zu suchen. Dazu betrachten wir nur noch die partikuläre Lösung:

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = \frac{f_0}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[4(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\delta^2\omega\right] \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\delta^2}{2} \overset{!}{\geq} 0$$

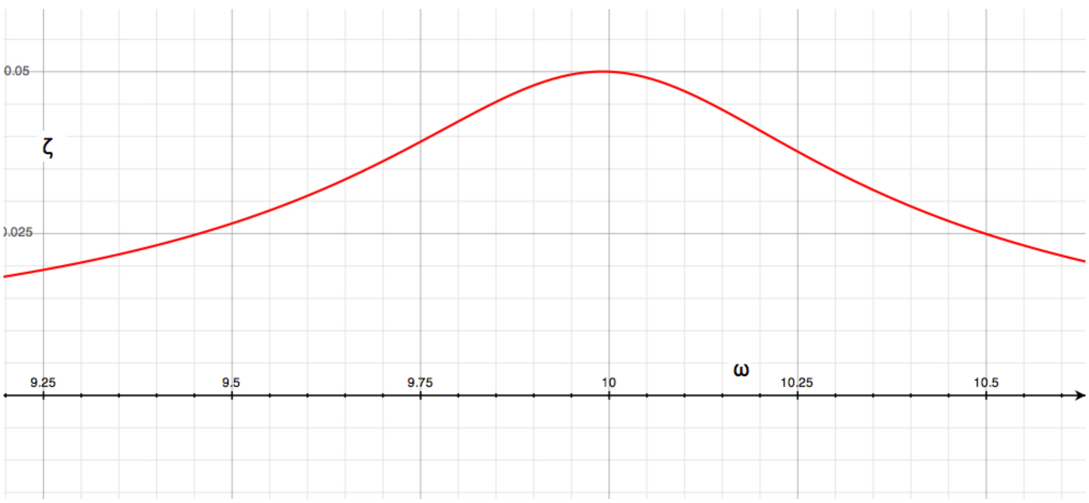
Für $\delta \leq 2\omega_0^2$ existiert also eine Kreisfrequenz ω_m für die ζ maximal wird:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{2}} \approx \omega_0 \;\wedge\; \zeta_m = \frac{2f_0}{\delta\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Diese Frequenz $\omega_m/2\pi$ wird auch in diesem Fall als Resonanzfrequenz bezeichnet.

Graphische Darstellung Folgende Graphik illustriert den Zusammenhang zwischen Amplitude ζ und Kreisfrequenz ω.

$$\omega_0 = 10s^{-1},\; f_0 = 0.2\,\frac{Einh.}{s^2},\; \gamma = \frac{\delta}{2} = 0.2s^{-1}$$



5.3 Phasenverschiebung

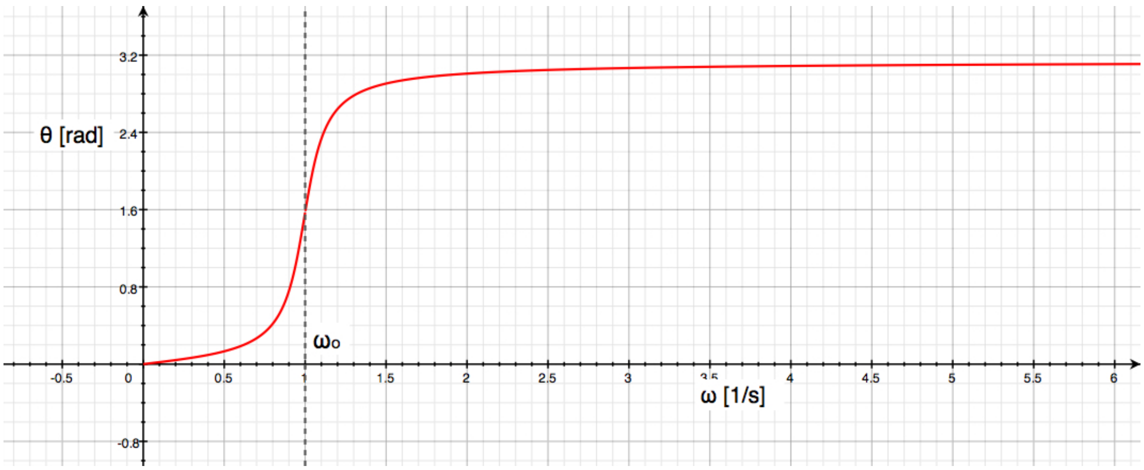
Die erregende Kraft ist im generellen Fall nicht in Phase mit der eigentlichen Schwingung. Die Phasenverschiebung θ hängt vom Reibungsfaktor δ, der Eigenkreisfrequenz ω_0 des Oszillators und der Erregerkreisfrequenz ω ab:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik illustriert den Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung θ und Kreisfrequenz ω.

$$\omega_0 = 1s^{-1},\; \delta = 0.2s^{-1}$$

[4]Natürlich hat jedes reales System seine Belastungsgrenzen jedoch kann hier die Amplitude nur endliche Werte annehmen



θ [rad]
3.2
2.4
1.6
0.8
-0.8
ω₀
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
4
4.5
5
5.5
6
ω [1/s]