Rotierende Bezugssysteme

Stilianos Louca

June 30, 2007

Contents

1 Einführung

1.1 Kurze Beschreibung des Problems

Dieser Artikel beschäftigt sich mit rotierenden Bezugssystemen. Es wird unter anderem die Coriolis-kraft hergeleitet und Rechenbeispiele gegeben. Er wendet sich vor allem an Studenten im 1 Fachsemester der Physik.

1.2 Fehler gefunden

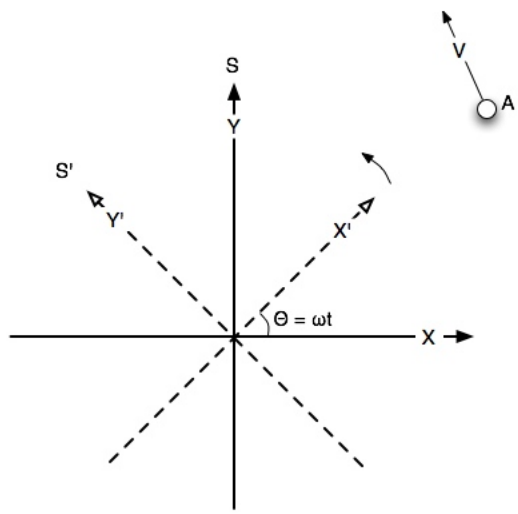
Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Rotierende Bezugssysteme

2.1 Beschreibung

Betrachten wir zwei zu einander rotierende Bezugssysteme S und S'. S sei ein Inertialsystem. Das System S' rotiere um die Z-Achse am gemeinsamen Koordinatenursprung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Der Winkel θ zwischen den beiden Systemen ist also stets gegeben durch $\theta = \omega t$. In deren Umgebung befinde sich ein Punkt A.

In Bezug zu S habe er den Ortsvektor $\vec{r}$, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$. Man kann schon erkennen dass sich der Ortsvektor $\vec{r}_r'$, die Geschwindigkeit $\vec{v}_r$ und eventuell auch die Beschleunigung $\vec{a}_r$ im rotierenden System von denen in S unterscheiden. Dies wollen wir genauer untersuchen.



2.2 Koordinatentransformation

Sei $\vec{w}$ ein beliebiger Vektor im System S:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Aus der analytischen Geometrie wissen wir, das dieser im S' wie folgt gegeben ist:

$$\vec{w}_r = R \cdot \vec{w} \; wobei \; R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; die \; Rotationsmatrix$$

$$\Rightarrow \vec{w}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y\cos(\theta) - x\sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t) \\ y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) \\ z \end{bmatrix}$$

Dies gilt für alle Arten von Vektoren.

2.3 Geschwindigkeitstransformation

Wäre θ Konstant, so könnte man einfach sagen:

$$\vec{v}_r = R \cdot \vec{v} \; \wedge \; \vec{a}_r = R \cdot \vec{a}$$

Doch aufgrund der Rotation ändert sich der Winkel θ und dem entsprechend auch R ständig mit der Zeit. Wir müssen also anders an die Sache ran gehen:

$$\dot{\vec{r}}_r = \dot{R} \cdot \vec{r} + R \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{R} \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) & 0 \\ -\omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\omega\sin(\omega t) + y\omega\cos(\omega t) \\ -x\omega\cos(\omega t) - y\omega\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \omega \begin{bmatrix} y_r \\ -x_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \vec{r}_r \times \vec{\omega}$$

$$R \cdot \dot{\vec{r}} = R \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}\cos(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t) \\ \dot{y}\cos(\omega t) - \dot{x}\sin(\omega t) \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = \dot{\vec{r}}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}\cos(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t) - x\omega\sin(\omega t) + y\omega\cos(\omega t) \\ \dot{y}\cos(\omega t) - \dot{x}\sin(\omega t) \; - x\omega\cos(\omega t) - y\omega\sin(\omega t) \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Oder einfacher:

$$\Rightarrow \vec{v}_r = \dot{\vec{r}}_r = R \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times \vec{r}_r$$

Die Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem S' ist also die (rotierte) Geschwindigkeit $\vec{v}$ in S minus der scheinbaren *Bahngeschwindigkeit* des S an diesem Punkt. Dies ist auch das was uns unsere Intuitivität sagen würde. Das rotierende Bezugssystem *holt den bewegten Punkt ein.*

2.4 Beschleunigungstransformation

Analog zu vorhin gehen wir jetzt einen Schritt weiter:

$$\ddot{\vec{r}}_r = \dot{\vec{v}}_r = \ddot{R} \cdot \vec{r} + \dot{R} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{R} \cdot \dot{\vec{r}} + R \cdot \ddot{\vec{r}} = \ddot{R} \cdot \vec{r} + 2\dot{R} \cdot \dot{\vec{r}} + R \cdot \ddot{\vec{r}}$$

Wir wollen uns jetzt diese 3 Glieder genauer ansehen:

$$\ddot{R} \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -\omega^2\cos(\omega t) & -\omega^2\sin(\omega t) & 0 \\ \omega^2\sin(\omega t) & -\omega^2\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\omega^2\cos(\omega t) - y\omega^2\sin(\omega t) \\ x\omega^2\sin(\omega t) - y\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \right) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$2\dot{R} \cdot \dot{\vec{r}} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) & 0 \\ -\omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -\dot{x}\omega\sin(\omega t) + \dot{y}\omega\cos(\omega t) \\ -\dot{x}\omega\cos(\omega t) - \dot{y}\omega\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} -\dot{x}\omega\sin(\omega t) + \dot{y}\omega\cos(\omega t) - x\omega^2\cos(\omega t) - y\omega^2\sin(\omega t) \\ -\dot{x}\omega\cos(\omega t) - \dot{y}\omega\sin(\omega t) + x\omega^2\sin(\omega t) - y\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x\omega^2\cos(\omega t) - y\omega^2\sin(\omega t) \\ x\omega^2\sin(\omega t) - y\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\omega \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_r \\ -\dot{x}_r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega \times (\omega \times \vec{r}_r) \right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{z}_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} - 2 \cdot \omega \times (\omega \times \vec{r}_r) = 2 \cdot \vec{v}_r \times \vec{\omega} - 2 \cdot \omega \times (\omega \times \vec{r}_r)$$

$R \cdot \ddot{\vec{r}} = R \cdot \vec{a}$: *Die rotierte Beschleunigung*

$\Rightarrow \vec{a}_r = \dot{\vec{v}}_r = R \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{v}_r \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

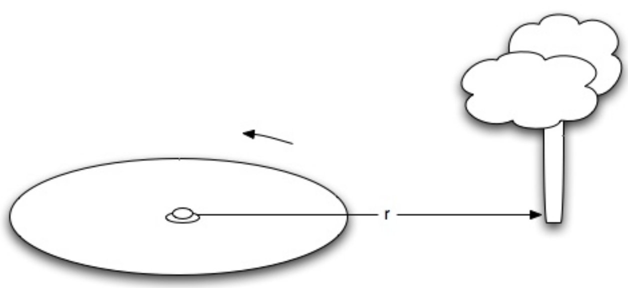
Das Glied $\vec{a_z} := -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ist die *Zentrifugalbeschleunigung* die nur im rotierenden System auftritt, und stets nach außen gerichtet ist. Das Glied $\vec{a}_c := 2 \cdot \vec{v}_r \times \vec{\omega}$ ist die so genannte *Coriolis Beschleunigung.* Sie tritt auch nur im rotierenden System auf, und wirkt immer Senkrecht auf die Bewegung $\vec{v}_r$ im System. Bewegt sich also ein Körper der Masse m im System S', so wirken auf ihn die *Scheinkräfte* $\vec{F}_z := \vec{a}_z \cdot m$ und $\vec{F}_c := \vec{a}_c \cdot m$. Letztere wird die *Coriolis Kraft* genannt.

Bemerke: Diese beiden Kräfte tretten nur im rotierenden System S' auf! Ein Außenstehender im Inertialsystem S würde sie nie mitkriegen, da sie nicht wirklich existieren! Man sollte sich außerdem im Klaren sein dass die Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungstransformation auch gilt wenn die beiden Koordinatenursprünge nicht übereinstimmen. Zum einen bleiben Geschwindigkeit und Beschleunigung auch bei einer Verschiebung gleich, zum zweiten beziehen sich die letzten beiden Ausdrücke sowieso nur auf das rotierende System S'. Bei den Scheinkräften ist keine Rede mehr vom Inertialsystem S!

3 Beispiele

3.1 Der Baum und die rotierende Scheibe

Wir stellen uns jetzt mal vor ein Käfer sitzt im Zentrum einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe (System S') und beobachtet einen fest stehenden Baum der Masse m der im Abstand r von der rotations-Achse die Sonne geniest.



Die Frage ist: Welche Kräfte wirken für den Käfer auf den Baum?

Antwort: Der Baum bewegt bzw. beschleunigt sich nicht wirklich. Es ist also $\vec{v} = \vec{a} = 0$. Wir können außerdem ohne weiteres die Geschwindigkeit $\vec{v}_r$ in S' ausrechnen:

$$\vec{v}_r = R \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times \vec{r}_r = 0 - \vec{\omega} \times \vec{r}_r.$$

Da $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ können wir auch ohne Vektorrechnung auskommen. Die Geschwindigkeit ist einfach tangential zur Bahn, oder senkrecht zum Radius.

$$v_r = -r \cdot \omega$$

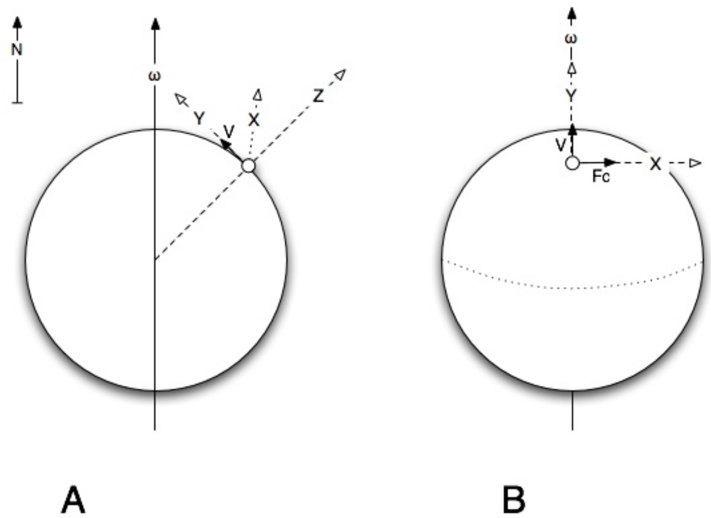
Der Baum bewegt sich also für den Käfer einfach im Kreis, entgegengesetzt der Scheiben-Rotation.
Analog:

$$\vec{a}_r = R \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{v}_r \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 - 2r\omega^2 + \omega^2 r = -\omega^2 r$$

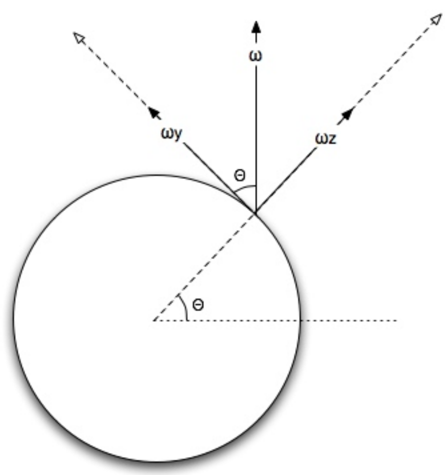
Es wirken also eine Corioliskraft $F_c = -2mr\omega^2$ und eine Zentrifugalkraft $F_z = m\omega^2 r$ auf den Baum. Die Summe $F = F_z + F_c = -m\omega^2 r$ dieser beiden Kräften ist auch für den Käfer die Erklärung warum der Baum sich um ihn rotiert und nicht einfach wegfliegt!

3.2 Die TzeTze Fliege

Eine TzeTze-Fliege der Masse $m = 0.2g$ fliegt tangential zur Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit $v = 1m/s$ bei einem Breitengrad von $\theta = 45°$ in Richtung Norden. Welch eine Corioliskraft wirkt auf sie?



Antwort: Man könnte jetzt wieder sofort zur Formel greifen und das ganze ausrechnen. Da wir aber nicht die Typen sind die Rechteckflächen per Integrale[1] ausrechnen würden(die gibt's wirklich), gehen wir mal anders an die Sache ran. Die Coriolisbeschleunigung $\vec{F_c}$ ist ein Kreuzprodukt zwischen $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ wobei $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5}s^{-1}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist. Als solches, steht sie immer senkrecht zu beiden Vektoren. Sie zeigt also entweder nach Westen oder nach Osten. Mittels der Korkenzieherregel stellt man fest dass sie nach Osten zeigt.

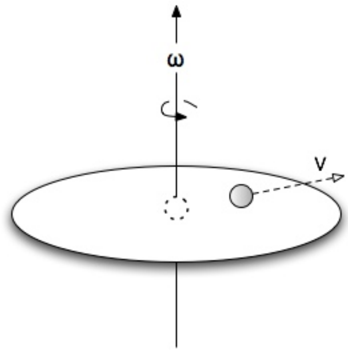


Das Kreuzprodukt ist außerdem Bilinear, also $\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{v} \times \vec{\omega}_x + \vec{v} \times \vec{\omega}_y + \vec{v} \times \vec{\omega}_z = 0 + 0 + \vec{v} \times \vec{\omega}_z$. Da $\vec{v} \perp \vec{\omega}_z$ können wir einfach sagen $F_c = 2mv\omega_z = 2mv\omega\sin(\theta) \approx 10.3 \cdot 10^{-9}N$.

3.3 Die Billardkugel

Im Zentrum einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe sitzt eine Billardkugel der Masse m. Plötzlich wird diese Kugel mit einer Geschwindigkeit v radial nach außen geworfen. Es tritt keine Wechselwirkung (wie zum Beispiel Reibung) zwischen Kugel und Scheibe auf. Die Schwerkraft wurde vorher ausgeschaltet.

[1] Riemansche Integrale sind ja durch Rechteckflächen definiert.



Welche Bahn verläuft diese Kugel im rotierenden System S' (Koordinatenursprung im Zentrum) der Scheibe?

Antwort: Betrachten wir das Problem erst mal vom rotierenden System S' aus. Die Kugel bewegt sich zunächst mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ nach außen. Dabei wirkt auf sie abgesehen von der Zentrifugalkraft $\vec{F}_z$ auch die Corioliskraft $\vec{F}_c$. Letztere wirkt immer senkrecht auf $\vec{v}$. Die Kugel wird also zur Seite abgelenkt. Doch nun wirkt $\vec{F}_c$ senkrecht zur neuen Geschwindigkeit. Gäbe es $\vec{F}_z$ nicht, so könnten wir einfach sagen die Kugel verläuft auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R = F_c/m\omega^2$. Ist leider nicht so einfach! Aufgrund der ständig nach außen gerichteten Zentrifugalkraft $\vec{F}_z$ ist die Bahn etwas komplizierter. Natürlich könnten wir jetzt folgende Differenzialgleichung lösen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_c + \vec{a}_z = 2 \cdot \vec{v} \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Oder nicht! Wir werden mal wieder den einfachsten Weg nehmen, und das ganze ohne den ganzen Formelkram betrachten. Die Kugel wird ja eigentlich nicht beschleunigt. Ihre komische Bewegung in S' kommt ja eigentlich durch die Rotation der Scheibe zustande. Die Scheibe dreht sich sozusagen unter der Kugel weg!

Nach einer Zeit t befindet sich die Kugel im Abstand $r = v \cdot t$ vom Zentrum der Scheibe und somit auch vom Koordinatenursprung O des Systems S'. Das System hat sich jedoch mittlerweile um den Winkel $\theta = \omega \cdot t$ gedreht. Das bedeutet im S' gesehen, hat sich die Kugel um den Winkel $-\theta$ um den Koordinatenursprung gedreht. Die Bahn ist also eine Archimedische Spirale:

$$r = v \cdot t = \frac{v}{\omega} \cdot \theta$$

In kartesischen Koordinaten ausgedrückt also:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(-\theta) = vt \cdot \cos(\omega t) \\ y &= r \cdot \sin(-\theta) = -vt \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Sie sieht also nach 13 Sekunden wie folgt aus:

$$\omega = 1s^{-1}, \ v = 0.5 \ Einh/s$$