

# Kohäsion und Oberflächenspannung

Stilianos Louca

June 30, 2007

## Contents

|                                                           |          |
|-----------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Einführung</b>                                       | <b>1</b> |
| 1.1 Kurze Beschreibung des Themas . . . . .               | 1        |
| 1.2 Fehler gefunden . . . . .                             | 1        |
| <b>2 Beschreibung des Phänomens</b>                       | <b>2</b> |
| 2.1 Die Kohäsion . . . . .                                | 2        |
| 2.2 Die Oberflächenenergie . . . . .                      | 2        |
| 2.3 Die Oberflächenspannung . . . . .                     | 3        |
| <b>3 Die Adhäsion kommt ins Spiel</b>                     | <b>4</b> |
| 3.1 Benetzung . . . . .                                   | 4        |
| 3.2 Grenzflächen zwischen drei Stoffen . . . . .          | 4        |
| 3.3 Kapillarität . . . . .                                | 5        |
| <b>4 Rechenbeispiele</b>                                  | <b>6</b> |
| 4.1 Die Gasblase . . . . .                                | 6        |
| 4.2 Die Kapillaraszension . . . . .                       | 7        |
| 4.3 Kapillaraszension in einem begrenzten Gefäß . . . . . | 8        |

## 1 Einführung

### 1.1 Kurze Beschreibung des Themas

Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Kohäsion bzw. der Oberflächenspannung in Flüssigkeiten. Er stellt auf keinen Fall eine gründliche Untersuchung des Phänomens dar, sondern versucht die grundlegenden Ideen nahe zubringen und zeigen wie man damit rechnerisch eigentlich umgehen kann. Er wendet sich hauptsächlich an Studenten im 1en Fachsemester der Physik.

### 1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: [Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org](mailto:Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org) ohne das *Obst*

## 2 Beschreibung des Phänomens

### 2.1 Die Kohäsion

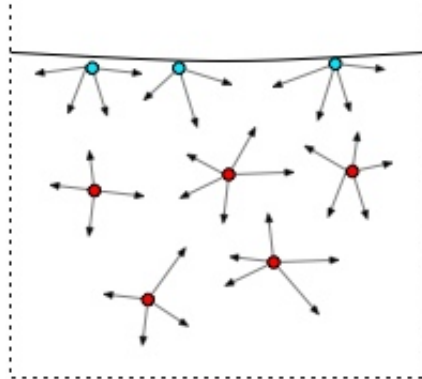
Die Kohäsion beschreibt die Zusammenhangskräfte zwischen den Teilchen eines Mediums. Diese Teilchen können u.a. Atome bzw. Moleküle sein. Ihre Ursachen<sup>1</sup> sind diverse:

1. Chemische Bindungen innerhalb von Molekülen
2. Anziehung benachbarter Atome bzw. Moleküle (z.B. Elektrostatische) u.a. durch Ionenbindung, Dispersions-Wechselwirkung, Wasserstoffbrückenbindungen und van-der-Waals-Wechselwirkung.
3. Mechanische Verschlaufung fadenförmiger Makromoleküle oder Verfilzung fasenförmiger Stoffe.

Das bedeutet, auf jedes Teilchen eines Stoffes, wirken diverse Kräfte im generellen *in jede Richtung*, heben sich jedoch gegenseitig auf. Folgen der Kohäsion sind zum Beispiel die Viskosität von Fluiden (dazu trägt natürlich auch u.a. die Innere Reibung bei) sowie die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten. Die Kohäsion ist auch der Grund warum sich Öltropfen in deiner Suppe immer wieder Vereinigen!

### 2.2 Die Oberflächenenergie

Betrachten wir die Flüssigkeit F in folgender Abbildung.



Wie zu sehen ist, wirken auf die *inneren* (Rot) Teilchen (z.B. Moleküle) der Flüssigkeit die Kohäsionskräfte gleichmäßig in ziemlich alle Richtungen. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall für die *Oberflächen*-Teilchen (Blau). Auf der äußeren Seite gibts nämlich keine anderen Teilchen die sie Anziehen, die Teilchen werden also sozusagen *nach innen gezogen*. Das heisst, umso näher sich ein Teilchen zur Oberfläche befindet, desto mehr wird es von den restlichen nach innen gezogen. Es muss also Arbeit verrichtet werden um ein Teilchen an die Oberfläche zu befördern! Anders formuliert, eine Erhöhung  $dA$  der *freien* Oberfläche setzt einen Zufluss  $dE$  an Energie voraus. Die gesamte (potentielle) Energie der Oberflächen-Teilchen wird Grenzflächenenergie<sup>2</sup> oder Oberflächenenergie genannt. Der Quotient  $\sigma := \frac{dE}{dA}$  beschreibt diese Grenzfläche und wird als Spezifische Grenzflächenenergie bezeichnet.

Fazit: Die Flüssigkeit versucht immer die kleinstmögliche Oberflächenenergie zu haben! Das heisst, Sie strebt im allgemeinen ihre Oberfläche so klein wie möglich zu halten!

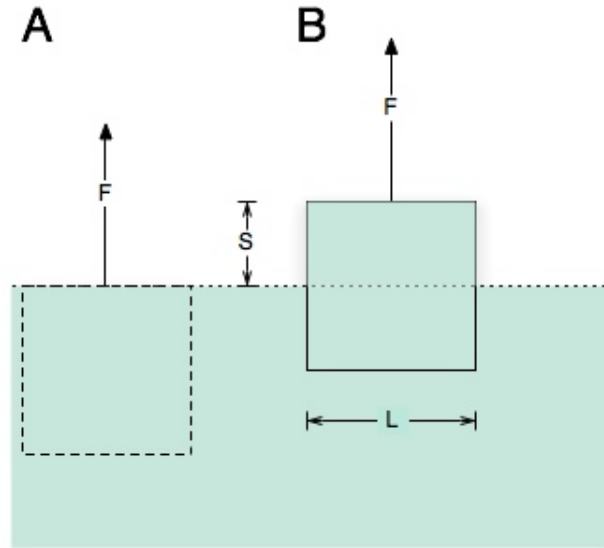
<sup>1</sup>Wir wollen in diesem Artikel diese Ursachen nicht genauer untersuchen

<sup>2</sup>Eine Oberfläche stellt im Falle von zwei aneinander Grenzenden Stoffen eine Grenzfläche dar

## 2.3 Die Oberflächenspannung

Aufgrund dieser Tatsache, wirkt gegen jede Erhöhung der freien Oberfläche eine gegenkraft (Schlüsselwort : Gradient der potentiellen Energie). Wir wollen dies im folgenden Gedankenexperiment besser untersuchen:

Mit Hilfe eines Rechteckig aufgespannten Drahtes versuchen wir eine Flüssigkeitslamelle der Höhe  $S$  aus einer Flüssigkeit zu ziehen. Erfahrungsgemäß müssen wir dabei eine Kraft  $F$  anwenden bzw. eine Arbeit  $W$  verrichten<sup>3</sup>.



Diese Arbeit ist zum einen gegeben durch  $W = F \cdot S$ . Zum anderen entspricht sie einer Erhöhung der Oberflächenenergie der Flüssigkeit! Die freie Oberfläche hat nämlich um  $\Delta A = 2LS$  zugenommen (Die Lamelle hat zwei Seiten). Der Quotient  $W/\Delta A = F/2L$  wird als Oberflächenspannung bezeichnet. Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie sind ein und das selbe! Ihre gemeinsame Einheit ist  $J/m^2 = N/m$ .

Bemerkung: Diese Einheit darf nicht verwirren! Wir haben ja gesehen dass die Oberflächenenergie  $E_o$  proportional zur freien Oberfläche  $A$  ist, das heisst  $E_o = A \cdot \sigma$ . Die Kraft bzw. Oberflächenspannung ist ja der Gradient von  $E_o$  zum Abstand, d.h

$$F = \text{grad}(E_o) = \frac{\partial E_o}{\partial S} = \frac{\partial(L \cdot S \cdot \sigma)}{\partial S} = L \cdot \sigma$$

Also ist  $[\sigma] = N/m$ . Spätere Beispiele werden dies verdeutlichen.

<sup>3</sup>Natürlich hatt da auch die Gravitation ihre Hände im Spiel, doch die wollen wir vernachlässigen

## 3 Die Adhäsion kommt ins Spiel

### 3.1 Benetzung

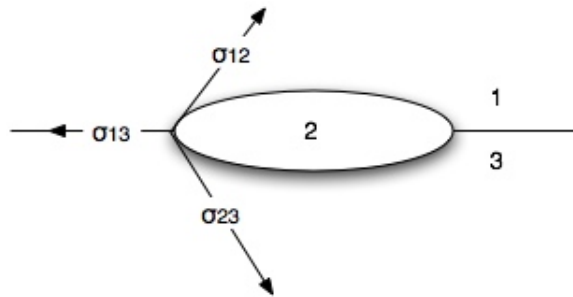
Wir haben bisher immer nur angenommen, dass sich die Flüssigkeit völlig isoliert von anderen Stoffen im Raum befindet. Dies ist jedoch erfahrungsgemäß meistens nicht der Fall.

Zwischen den Molekülen zweier aneinander grenzender Stoffe wirken analog zur Kohäsion auch noch andere Kräfte. Die Gesamtheit dieser Kräfte wird als Adhäsion bezeichnet. Grenzen zwei Stoffen an einander, so wirkt an der Grenzfläche nicht nur die Kohäsion sondern auch die Adhäsion, weshalb die spezifische Oberflächenenergie, jetzt Grenzflächenenergie, nicht mehr nur von den Kohäsionskräften abhängt. Sind nämlich die Adhäsionskräfte groß genug, so kann es passieren, dass diese die Kohäsionskräfte überwiegen und so die Stoffe streben, ihre Grenzfläche zu vergrößern! Ist dies der Fall, so werden diese Stoffe als benetzend bezeichnet. Diese Eigenschaft beschreibt also immer ein Paar von Stoffen, bzw. eine Grenzfläche.



### 3.2 Grenzflächen zwischen drei Stoffen

Betrachten wir ein Tröpfchen der Flüssigkeit 2 zwischen den Fluiden 1 und 3.

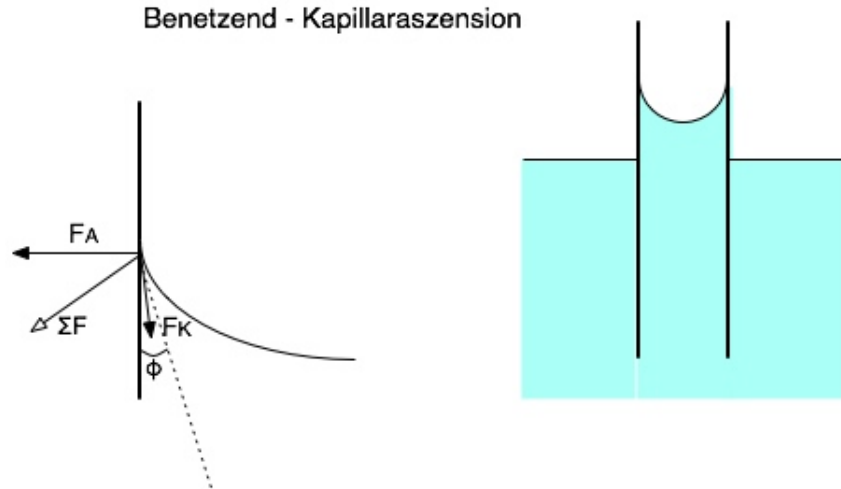


Entlang der Grenzlinie des Tröpfchens wirken im wesentlichen 3 Spannungen:  $\vec{\sigma}_{12}$ ,  $\vec{\sigma}_{13}$  und  $\vec{\sigma}_{23}$ . Die wirken tangential zur jeweiligen Grenzfläche (da sie streben diese zu verkleinern bzw. zu vergrößern)! Die Form des Tröpfchens ist im Gleichgewicht wenn  $\vec{\sigma}_{12} + \vec{\sigma}_{13} + \vec{\sigma}_{23} = 0$ . Sind z.B. die Kohäsionskräfte im Tröpfchen zu klein, so kann es passieren, dass  $\vec{\sigma}_{13}$  das ganze so weit auseinander zieht, bis das "Tröpfchen" nur noch aus einer mono-molekularen Schicht besteht.

### 3.3 Kapillarität

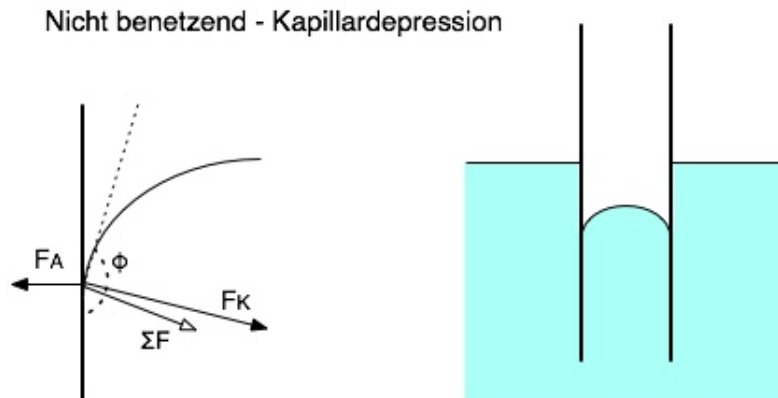
Betrachten wir jetzt eine Flüssigkeit  $F$  in die eine Fläche bzw. ein Röhrchen aus einem Festen Stoff  $S$  eingetaucht wird. Wir wollen der Einfachheit zu Liebe annehmen das ganze findet im Vakuum statt, d.h es kommt kein dritter Stoff ins Spiel. An jedem Punkt nimmt die Flüssigkeitsoberfläche immer die Form an, dass die Summe aller *Oberflächenkräfte* senkrecht auf sie gerichtet ist.

Ist die Flüssigkeit benetzend zu  $S$ , d.h sind die Adhäsionskräfte  $F_A$  stark genug, dann versucht sie sich an die Fläche *anzuschmieren*. Sie versucht also die Grenzfläche zu maximieren, insofern es natürlich die Kohäsionskräfte  $F_K$  erlauben. Dies hat indirekt zur Folge dass der Flüssigkeitspegel innerhalb des Röhrchens etwas steigt: Es tritt die so genannte *Kapillaraszension* auf.



Den eingezeichneten Winkel  $\phi$  zwischen Oberfläche und Wand nennt man den Randwinkel.

Ist die Flüssigkeit nicht benetzend zu  $S$  dann versucht sie die Grenzfläche zu minimieren, insofern es natürlich die Adhäsionskräfte erlauben. Der Flüssigkeitspegel innerhalb des Kapillares ist etwas niedriger als außerhalb. Es tritt die so genannte *Kapillardepression* auf.

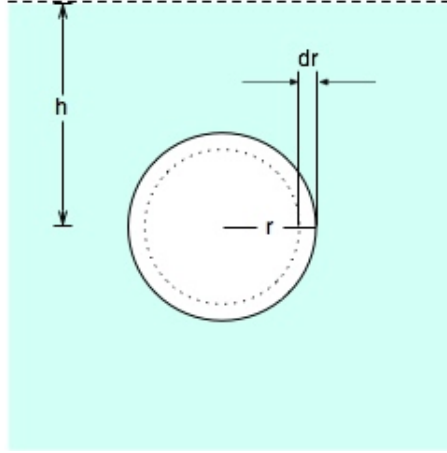


Fazit: Ist der Randwinkel  $\phi < \pi/2$  tritt Kapillaraszension auf, ist  $\phi > \pi/2$  tritt Kapillardepression auf. Was passiert wohl bei  $\phi = \pi/2$  und warum?

## 4 Rechenbeispiele

### 4.1 Die Gasblase

Betrachten wir eine kleine, stabile Gasblase mit dem Radius  $r$  innerhalb einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  in der Tiefe  $h$  ( $h \gg r$ ). Die Adhäsionskräfte zwischen Gas und Flüssigkeit sowie Kohäsion innerhalb der Blase seien vernachlässigbar. Gesucht ist der Druck  $P$  innerhalb der Gasblase.



Auf die Grenzfläche zwischen Gas und Flüssigkeit wirkt zum einen die Oberflächenspannung, der Höhendruck  $P_h = h g \rho$  und zum anderen der Innere Druck  $P$  des Gases. Im Gleichgewicht ist die potentielle Energie  $E_{pot}$  in einem Minimum. Das heisst, jede Änderung  $dr$  des Blasen-Radius würde weder Energie freisetzen noch verbrauchen. Eine Änderung  $dr$  bzw.  $dA$  des Radius bzw. der Grenzfläche, würde zum einen eine Änderung  $\sigma dA$  der Oberflächenenergie bewirken, jedoch auch eine Arbeit  $(P_h - P)A \cdot dr$  leisten.

$$dE = \sigma dA + (P_h - P)A dr \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow P - P_h = \frac{\sigma dA}{A dr}$$

Die Grenzfläche  $A$  ist gegeben durch:

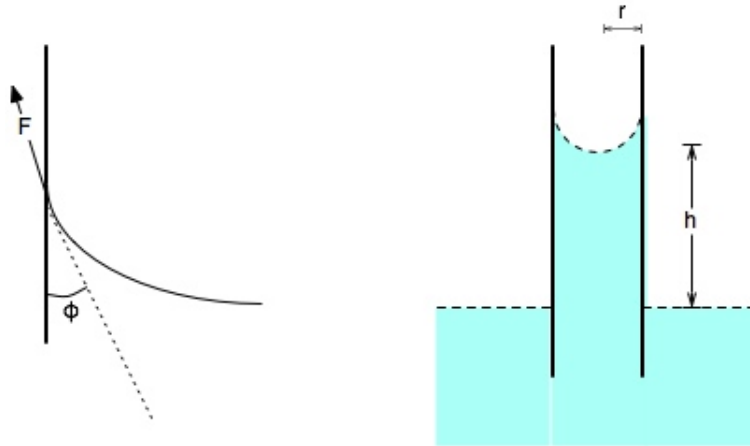
$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

Also:

$$P = \frac{\sigma dA}{A dr} + P_h = \frac{\sigma 8\pi r}{4\pi r^2} + P_h = \frac{2\sigma}{r} + h g \rho$$

## 4.2 Die Kapillaraszension

Wir wollen jetzt die Höhe der Flüssigkeitssäule im Kapillar aus Abschnitt 3.3 ausrechnen. Der Radius des Kapillares sei  $r$  und  $h$  die gesuchte Höhe. Die Dichte der Flüssigkeit sei  $\rho$ .



**Methode A:** Auf die äußere Grenzlinie am oberen Ende der Säule wirkt aufgrund der Oberflächenspannung eine Kraft  $F = \sigma l$  tangential zur Oberfläche (analog zu 2.3), wobei  $l = 2\pi r$  die Länge dieses *Ringes* ist. Die vertikale Komponente  $F_z$  dieser Kraft ist dafür verantwortlich dass die Flüssigkeit nach oben steigt. Im Gleichgewicht ist sie gleich dem Gewicht  $h\pi r^2 \rho g$  der Säule, also:

$$F_z = F \cos(\phi) = \sigma 2\pi r \cos(\phi) = h\pi r^2 \rho g \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos(\phi)}{r g \rho}$$

**Methode B:** Analog zu 4.1 können wir auch hier mit dem Energiesatz argumentieren. Im Gleichgewicht gilt nämlich:

$$dE = \sigma \cdot dA + \pi r^2 \rho g h \cdot dh = 0$$

Jetzt muss man sehr scharf hingucken und sich überlegen: Was für eine Oberflächenänderung  $dA$  würde denn eine Höhenänderung  $dh$  bewirken? Wäre das Kapillar schon vollständig mit der Flüssigkeit benetzt, so würde  $dA = -2\pi r \cdot dh$  sein. Dies ist jedoch nicht der Fall. Bemerke: Wir reden hier nicht über die Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Kapillar, sondern über die *freie* Oberfläche! Der schon erwähnte *Grenzring* ist also fest! Da die Oberfläche dort im Winkel  $\phi$  zur vertikalen steht, ist  $dA = -dh \cdot 2\pi r \cos(\phi)$ . Also:

$$\sigma \cdot dA = -\pi r^2 \rho g h \cdot dh = \frac{\pi r^2 \rho g h \cdot dA}{2\pi r \cos(\phi)} \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos(\phi)}{r g \rho}$$

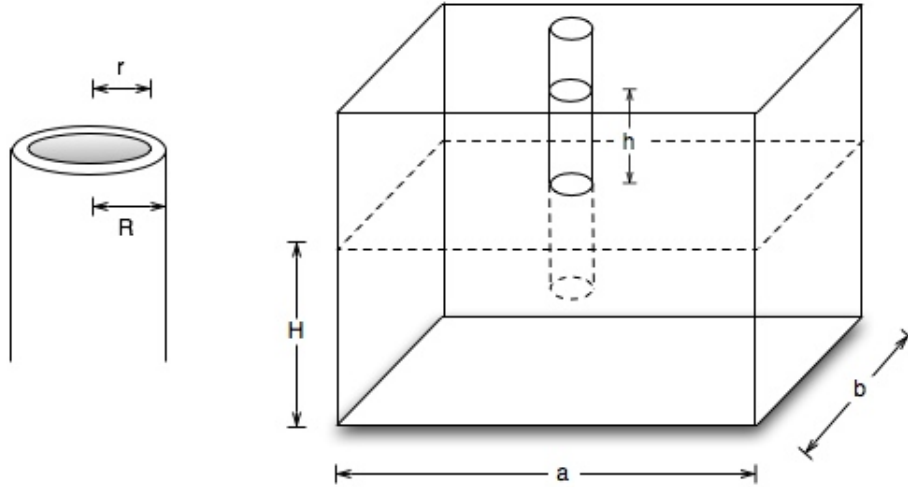
**Fazit:** Man kann sich das ganze simpel dargestellt wie folgt vorstellen:

Aufgrund der Adhäsion versucht die Flüssigkeit das gesamte Kapillar zu benetzen. Aufgrund der gegenwirkenden Kohäsionskräfte kann dies nur begrenzt geschehen, und zwar so lange wie die Flüssigkeitssäule hinterher kommen kann. Die Kohäsion ist genau dafür zuständig! Ab einer bestimmten Höhe ist das Gewicht der Säule jedoch so groß das die Flüssigkeit das ganze nicht mehr mit macht! Es setzt sich ein Gleichgewichtszustand zwischen den nach oben ziehenden Kohäsionskräften bzw. den ursprünglich ziehenden Adhäsionskräften und dem Gewicht der Säule ein.

**Vergleichsbeispiel:** Man stelle sich einen Heißluftballon vor. Zieht man ihn nach unten (analog: Kohäsion), so ist es in der Regel der Fall das man sich selber eigentlich nach oben zieht! Ist man aber schwer genug so überwiegt unser Gewicht die Auftriebskraft (analog: Adhäsion) die auf den Ballon wirkt, und wir bleiben samt Ballon am Boden!

### 4.3 Kapillaraszension in einem begrenzten Gefäß

Im vorigen Beispiel habe wir angenommen dass die gesamte Flüssigkeit von einem Gefäß unbegrenzter Größe umgeben war bzw. haben wir gar nicht an so ein Gefäß gedacht! Wir wollen das ganze jetzt nochmals für ein begrenztes Gefäß ausrechnen. Die Flüssigkeit befinde sich also in einem Gefäß mit der Grundfläche  $A_G$  und dem Umfang  $L$ . Beziehen wir uns auf folgende Abbildung, wäre also  $A_G = a \times b$ ,  $L = 2(a + b)$ . Wir wollen außerdem zwischen Innenradius ( $r$ ) und Außenradius ( $R$ ) des Kapillares unterscheiden.



Wir werden mal wieder mit dem Energiesatz arbeiten. Eine Erhöhung der Säule um  $dh$  würde eine Oberflächenreduzierung  $dA_1 = 2\pi r \cos(\phi) \cdot dh$  innerhalb des Kapillares, eine Oberflächenerhöhung  $dA_2 = 2\pi R \cos(\phi) \cdot dH$  um das Kapillar herum und eine Oberflächenerhöhung  $dA_3 = L \cos(\phi) \cdot dH$  am Umfang des Gefäßes bewirken. Was ist jetzt aber  $dH$  zu  $dh$ ? Eine Erhöhung der Säule um  $dh$  versetzt ja ein Volumenteil  $dV = dh \cdot \pi r^2$  des Gefäßes in das Kapillar hinein. Also  $dH = dV/(A_G - \pi R^2) = dh \cdot \pi r^2/(A_G - \pi R^2)$ . Im Gleichgewicht gilt:

$$dE = dh \cdot h\pi r^2 \rho g + \sigma(dA_2 + dA_3 - dA_1) = 0 \Rightarrow h = \frac{\sigma(dA_1 - dA_2 - dA_3)}{\pi r^2 \rho g \cdot dh}$$

Einsetzen von  $dA_1, dA_2, dA_3$  führt zu:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sigma(2\pi r \cos(\phi)dh - 2\pi R \cos(\phi)dH - L \cos(\phi)dH)}{\pi r^2 \rho g \cdot dh} \\ &= \frac{2\sigma \cos(\phi)}{r \rho g} \cdot \left[ 1 - \frac{R\pi r}{G - \pi R^2} - \frac{rL}{2(G - \pi R^2)} \right] \\ &= h_0 \cdot \left[ 1 - \frac{r(2\pi R + L)}{2(G - \pi R^2)} \right] \quad \text{wobei} \quad h_0 := \frac{2\sigma \cos(\phi)}{r \rho g} \end{aligned}$$

In unserem Fall also:

$$h = h_0 \cdot k \quad \text{wobei} \quad k := 1 - \frac{r(a + b + \pi R)}{ab - \pi R^2}$$

Gehen die Dimensionen  $a, b$  zu  $\infty$  so geht die Korrektur  $k$  zu 1:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} k = 1 - \frac{r}{b} \Rightarrow \lim_{a, b \rightarrow \infty} k = 1 \Rightarrow \lim_{a, b \rightarrow \infty} h = h_0$$

was auch unseren Erwartungen entspricht!