Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Stilianos Louca

30. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was dieser Artikel ist

Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Untersuchung des Gravitationsfeldes innerhalb und außerhalb einer Massenkugel. Er wendet sich hauptsächlich an Physikstudenten im 1 Fachsemester.

1.2 Was dieser Artikel nicht ist

Dieser Artikel dient nicht der Herleitung oder Beschreibung mathematischer Theoreme oder Methoden. Mathematische Rechnungen werden daher nicht mathematisch sauber"bewiesen sondern nur Physikalisch begründed. Dabei handelt es sich hier keineswegs um eine hochwertige wissenschaftliche Arbeit!

1.3 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Das newtonsche Gravitationsgesetz

2.1 Massenpunkte

Seien m und M zwei Punktmassen im Abstand R von einander. Dann wirkt zwischen diesen beiden Massen eine Kraft F entlang der Verbindungslinie die diese Massen aufeinander zu ziehen vermag:

$$F = -\frac{m \cdot M \cdot G}{R^2}$$

wobei $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$ die so genante Gravitationskonstante ist. Die Kraft wird konventionel als negativ betrachtet um Konsistenz mit dem Coulombgesetz zu wahren, wo sich Ladungen verschiedener Vorzeichen anziehen. Dieses als erstes von Newton formulierte Gesetz wird, siehe da, das *Newtonsche Gravitationsgesetz* genant.

Will man die Kraft zwischen zwei realen Körpern ausrechnen, so muss man berücksichtigen dass sich jede Punktmasse im Körper an einer anderen Stelle befindet. Jedoch kann man oft die günstige Näherung machen und die Körper als zwei Punktmassen betrachten, deren gesamte Massen in ihren Schwerpunkten konzentriert sind.

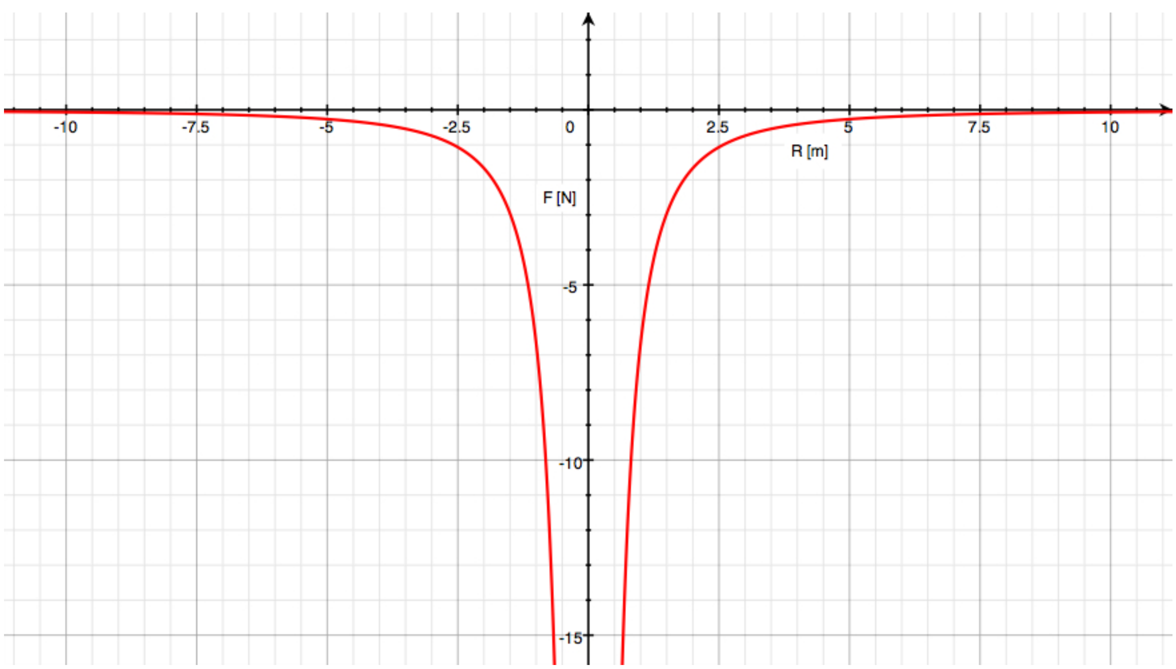
2.1.1 Kraftfeld

Wir haben gesehen dass jeder Massenpunkt M auf jede masse m in seiner *Umgebung* eine Kraft $\vec{F}$ ausübt. Er spannt also ein *Kraftfeld*[1] auf, das sog. *Schwerefeld*. Dieses Kraftfeld E wird beschrieben durch:

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{r} = -\frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt die Kraft F in abhängigkeit vom Abstand R dar für:

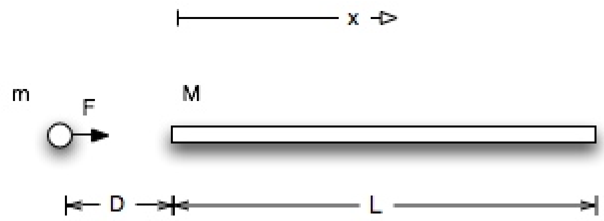
$$m = 1Kg$$
$$M = 10^{11}Kg$$



[1] Jedes Kraftfeld ist ein Vektorfeld im Raum

2.2 Einfache reale Körper

Betrachten wir folgenden Fall: Ein Massenpunkt m und ein Dünner Stab der Masse M und Länge L sind wie folgt angeordnet:



Zu finden ist die Kraft F die den Massenpunkt m in Richtung des Stabes zieht. Wir wissen dass jeder Massenpunkt des Stabes der Masse dM eine Kraft dF genau in Richtung F auf die Masse m ausübt.

$$dF = -\frac{Gm}{R^2} \cdot dM,\ wobei\ R = x + D$$
$$dM = \rho \cdot dx,\ wobei\ \rho = \frac{M}{L}\ die\ lineare\ Dichte$$
$$\Rightarrow dF = -\frac{Gm\rho}{(x+D)^2} \cdot dx$$
$$\Rightarrow F = \int_0^L -\frac{Gm\rho}{(x+D)^2} \cdot dx = -Gm\rho \cdot \left[\frac{1}{-(x+D)}\right]_0^L = -\frac{GMm}{D \cdot (L+D)}$$

Man sieht:

$$\lim_{L \to 0} F = -\frac{GMm}{D^2}$$

2.2.1 Massenschwerpunkt

Hat man ein System aus Massenpunkten m_i bzw. einen realen Körper, so definiert man als Schwerpunkt folgenden Ausdruck:

$$\vec{r}_s = \sum m_i \cdot \vec{r}_i \equiv \int \vec{r} \cdot dm$$

Betrachten wir noch einmal die letzte Aufgabe. Würden wir die Näherung machen und die gesamte Masse M des Stabes als in in seinem Schwerpunkt konzentriert betrachten, so würden wir eine Kraft F' bekommen:

$$F' = -\frac{GmM}{\left(D + \frac{L}{2}\right)^2}$$

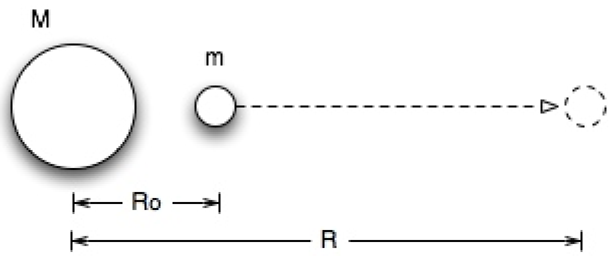
was offensichtlich falsch ist! Geht jedoch der Abstand D zu unendlich so geht der Ausdruck in eine einfachere Form über:

$$F_\infty = \lim_{D \to \infty} -\frac{GMm}{D \cdot (L+D)} = -\frac{GmM}{D^2}$$

3 Fliehgeschwindigkeit und Potential

3.1 Fliehgeschwindigkeit

Betrachten wir zwei Massenpunkte m und M im Abstand R_0. Wir nehmen an die Masse M sei fest im Raum. Sie spannt also ein Kraftfeld $\vec{E}(\vec{r})$ auf. Wir wollen jetzt die zweite Masse m auf einen neuen Abstand R befördern. Gesucht ist die dabei errichtete Arbeit E, bzw. Energie die ich der Masse m dabei gegen muss.



Wir wollen uns erstmal mit dem kürzesten Weg beschäftigen. Es muss also ständig eine Gegenkraft $\vec{F} = -\vec{E} \cdot m$ auf die Masse m wirken:

$$dE = \vec{F} \cdot \vec{dx} = \frac{GMm}{r^2} \cdot dx, \; wobei\ r: \; der\ momentane\ Abstand$$

$$\Rightarrow E = \int_{R_0}^{R} \frac{GMm}{r^2} \cdot dr = -GMm \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{R_0}^{R} = GMm \cdot \left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right]$$

Will man die Masse m ins unendliche befördern so ergibt sich die gesamte erforderte Energie als:

$$E_\infty = \lim_{R \to \infty} GMm \cdot \left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right] = \frac{GMm}{R_0}$$

Diese Energie E_∞ entspricht einer Anfangsgeschwindigkeit v:

$$E_\infty = \frac{v^2 m}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Diese Geschwindigkeit wird als *Fliehgeschwindigkeit* für die Masse M im Abstand R_0 bezeichnet. Für die Erdoberfläche[2] beträgt sie etwa 11 Km/s.

3.2 Weg unabhängigkeit

Bei Schwerefeldern handelt es sich um *konservative* Kraftfelder. Das heisst jeder geschlossener Weg ergibt eine gesamte errichte Arbeit 0! Analog ist es egal *welchen* Weg man nimmt, die errichtete Arbeit ist nur von Anfangs- und End-position abhängig! Diese Aussage läst sich leicht verifizieren da:

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$$

3.3 Die potentielle Energie

Wir können also von einem *Potentialfeld*[3] sprechen. Wir definieren die potentielle Energie einer Masse m am Punkt P_1 bezüglich eines Ausgangspunktes P_0 bzw. Ausgangsabstandes R_0 als die Energie E die freigesetzt wird wenn ich diese Masse von P_1 nach P_0 befördere. Das heisst das eigentlich die potentielle Energie einer Masse m immer in Bezug auf einen Ausgangspunkt betrachtet werden muss. Wir haben schon gesehen dass diese gegeben ist als:

$$E = GMm \cdot \left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right]$$

[2] Es wird später gezeigt: Eine Kugel kann von außen als Massenpunkt betrachtet werden

[3] Das Potentialfeld einer Masse M ist ein Skalarfeld im Raum

Im Abstand R_0 ist also die Potentielle Energie gleich 0. Es lohnt sich jedoch diesen Ausgangspunkt ins Unendliche zu setzten. So ergibt sich:

$$E_{pot} = -\frac{GMm}{R_1}$$

Im Unendlichen hat die Masse m also die maximale potentielle Energie 0! Dieß darf aber nicht verwirren da man im 2en Stockwerk auch eine höhere Potentielle Energie hat als im Erdgeschoss.

3.3.1 Potentialfeld

Das Potential U in einem Punkt ist dann die spezifische potentielle Energie einer Masse m an dieser Position, also:

$$U := \frac{E}{m} = -\frac{GM}{R}$$

3.3.2 Die Kraft als Gradient der potentiellen Energie

Es ist bekannt dass die Schwerkraft auf einer Masse m in einem Potentialfeld immer in die Richtung des Steilsten *Abhanges* dieses Feldes zeigt. Betragsmässig entspricht sie dann der *Steigung* in diese Richtung. Formaler gesagt: Die Schwerkraft in einem Potentialfeld die auf einer Masse m wirkt ist der negierte *Gradient* dieses Feldes mal m:

$$\vec{F} = -grad(U) \cdot m = -\nabla \cdot U \cdot m = -\nabla \cdot E$$

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt die potentielle Energie in Abhängigkeit vom Abstand R einer Masse m von einer Bezugsmasse M dar:

$$m = 1Kg$$
$$M = 2 \cdot 10^{11} Kg$$

3.3.3 Zusammensetzung von Potentialfeldern

Hat man mehrere Massenpunkte bzw. Körper so addieren sich die Potentialfelder einfach! Das sich daraus ergebende Kraftfeld ist natürlich auch konservativ. Betrachten wir zum Beispiel die Situation in 2.2. Jeder Massenpunkt im Stab spannt ein Potentialfeld auf. Die potentielle Energie der Masse m ist also:

$$\begin{aligned}
&dE = -\frac{GmM}{(x+D)} \\
&\Rightarrow E = \int_0^L -\frac{Gm\rho}{(x+D)} \cdot dx \\
&= -GmM \cdot [\ln (x+D)]_0^L = -GmM \cdot [\ln (L+D) - \ln (D)]
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$-\,grad(E) = -\frac{\partial E}{\partial D} = GmM \cdot \left[\frac{1}{(L+D)} - \frac{1}{D}\right] = -\frac{GmM}{D \cdot (L+D)} = F$$

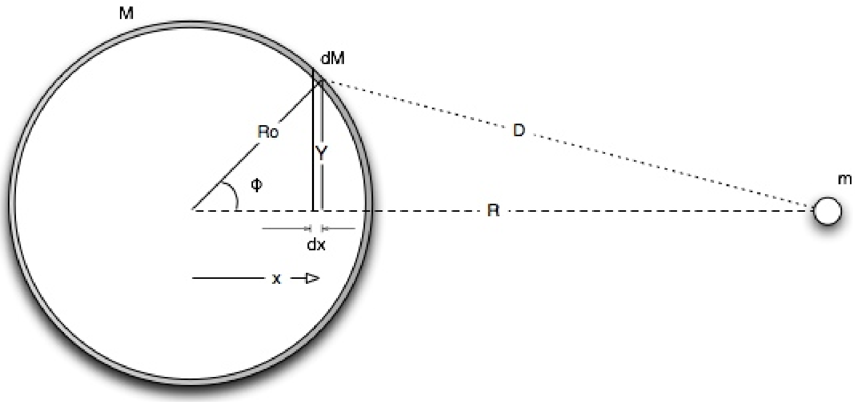
Siehe da!

4 Spezialfall eines Körpers: Die Kugel

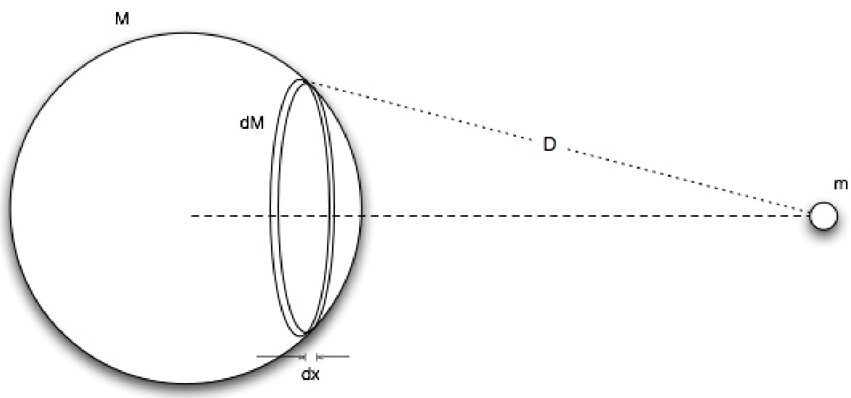
Wir wollen uns jetzt mal einen wichtigen Spezialfall näher angucken: Die Kugel.

4.1 Potential und Kraftfeld einer Kugelschale

Betrachten wir eine homogene Kugelschale mit der Masse M, dem Radius R_0 und einer sehr dünnen Wand. Im Abstand vom Zentrum befindet sich eine zweite Masse m. Gesucht ist die potentielle Energie E bzw. die Kraft F auf der Masse m.



Zu jedem *Schritt* dx im Abstand x vom Kugelzentrum gehört ein Ring-Segment mit dem Radius Y und der Masse dM auf der Kugelschale.



Alle Massenpunkte auf diesem Ring haben genau den Abstand D von der Masse m.

$$Y^2 = R_0^2 - x^2$$
$$D^2 = Y^2 + (R-x)^2 = R_0^2 - x^2 + (R-x)^2 = R_0^2 + R^2 - 2Rx$$

Die Fläche dA dieses Ringes ist:

$$dA = 2\pi Y \cdot \frac{dx}{\sin(\phi)}, \ \sin(\phi) = \frac{Y}{R_0}$$
$$\Rightarrow dA = 2\pi R_0 \cdot dx$$

Die Masse dM dieser Ringes ergibt sich als:

$$dM = dA \cdot \rho, \ \rho = \frac{M}{4\pi R^2} : \textit{Die Flächendichte}$$
$$\Rightarrow dM = \frac{M}{2R_0} \cdot dx$$

Jetzt summieren wir über alle Ringe und erhalten unsere potentielle Energie:

$$dE = -\frac{Gm}{D} \cdot dM = -\frac{GmM}{2R_0 \cdot \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}} \cdot dx$$

$$\Rightarrow E = \frac{GmM}{2R_0} \cdot \int_{-R_0}^{R_0} -\frac{dx}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}} = \frac{GmM}{2R_0 R} \cdot \left[\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2Rx}\right]_{-R_0}^{R_0}$$

$$= \frac{GmM}{2RR_0} \cdot \left[\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0} - \sqrt{R_0^2 + R^2 + 2RR_0}\right]$$

$$= \frac{GmM}{2RR_0} \cdot \left[\sqrt{(R_0 - R)^2} - \sqrt{(R_0 + R)^2}\right]$$

Fall 1: $R_0 \leq R$

$$\rightarrow R_0 - R \leq 0$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \frac{GmM}{2RR_0} \cdot [(R - R_0) - (R_0 + R)] = -\frac{GmM}{R}$$

Das potential außerhalb der Kugel ist also gleich als wenn wir die Kugel als Punktförmig betrachten würden! Die kraft wäre dann also:

$$F = -grad(E_{pot}) = -\frac{\partial E}{\partial R} = -\frac{GmM}{R^2}$$

Fall 2: $R_0 > R$

$$\rightarrow R_0 - R > 0$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \frac{GmM}{2RR_0} \cdot [(R_0 - R) - (R_0 + R)] = -\frac{GmM}{R_0}$$

Innerhalb der Kugelschale ist das Potential konstant! Die Kraft wäre analog zu vorhin:

$$F = -grad(E_{pot}) = 0$$

Innerhalb der Kugelschale ist das Schwerefeld also überall gleich 0.

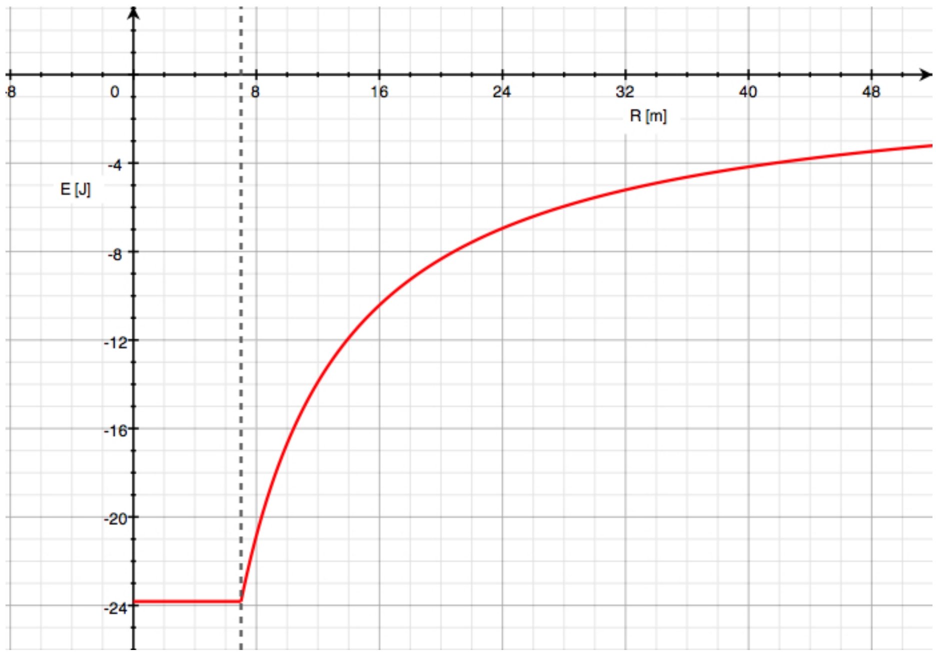
Grenzfall Bemerkenswert ist der Grenzfall $R = R_0$, wo sich die Masse m also genau an der Oberfläche der Kugelschale befindet. Dann ist nämlich:

$$\lim_{R \searrow R_0} E_{pot} = \lim_{R \nearrow R_0} E = -\frac{GmM}{R_0}$$

Das Potentialfeld (analog auch das Kraftfeld) ist also wie erwartet selbst an diesem Grenzübergang stetig!

Graphische Darstellung Folgende Graphik stellt die potentielle Energie in Abhängigkeit vom Abstand R einer Masse m vom Zentrum einer Kugelschale der Masse M und dem Radius R_0 dar:

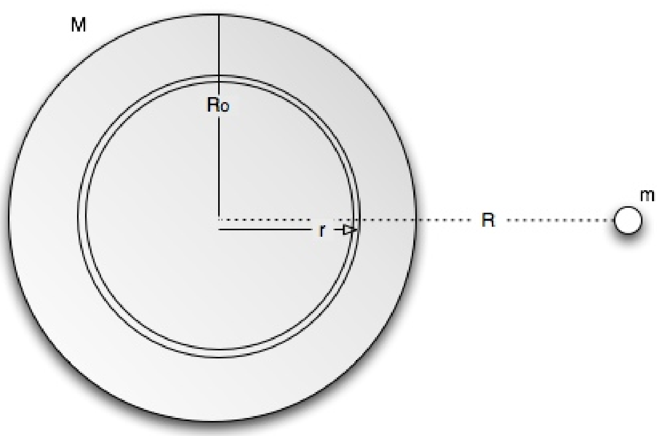
$$m = 5Kg$$
$$M = 5 \cdot 10^{11} Kg$$
$$R_0 = 7m$$



4.2 Pottential und Kraftfeld einer Vollkugel

4.2.1 Außerhalb der Kugel ($R \geq R_0$)

Betrachten wir die Masse m im Abstand R vom Zentrum einer Vollkugel mit dem Radius R_0 und der Masse M.



Wir können uns die Kugel als ein Stapel aus Kugelschalen der Dicke dr vorstellen und dem jeweiligen Radius r. Die Masse dM solch einer Schale ist dann:

$$dM = dV \cdot \rho, \;\; \rho = \frac{3M}{4\pi R_0^3}, \;\; dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\Rightarrow dM = \frac{3M}{R_0^3} \cdot r^2 \cdot dr$$

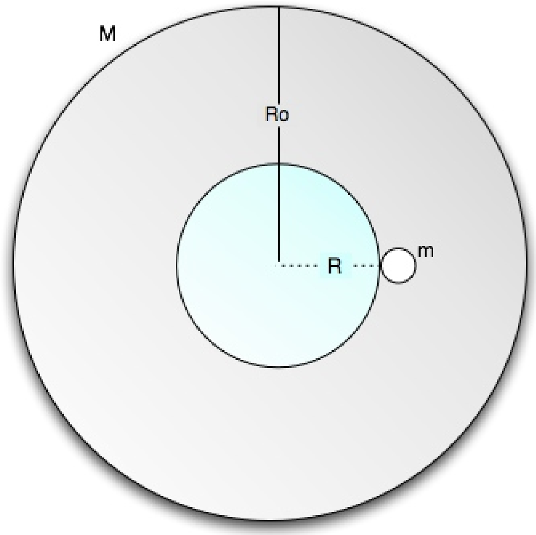
Wie in 3.3.3 gezeigt wurde addieren sich die jeweiligen Potentiale einfach:

$$dE = -\frac{Gm}{R} \cdot dM = -\frac{3GmM}{RR_0^3} \cdot r^2 \cdot dr$$
$$\Rightarrow E = -\frac{3GmM}{RR_0^3} \int_0^{R_0} r^2 \cdot dr = -\frac{GmM}{R}$$
$$\Rightarrow F = -grad(E) = -\frac{GmM}{R^2}$$

Siehe da! Die Vollkugel verhält sich auch wie ein Massenpunkt! **Achtung:** Dies gilt offensichtlich bei den meisten Körpern nicht!

4.2.2 Innerhalb der Kugel ($R < R_0$)

Betrachten wir das selbe Problem, mit dem einzigen Unterschied dass sich diesmal die Masse m innerhalb der kugel befindet. Es ist schon nahe-liegend zu vermuten dass die *äuseren* Schichten keine Kraft auf die Masse ausüben da es sich ja bei allen um Kugelschalen handelt. Wir unterscheiden also zwischen den *unteren* Schichten (r<R) und den *oberen* Schichten ($r \geq R$).



Für die unteren Schichten haben wir gezeigt:

$$E_u = -\frac{GmM_u}{R} = -\frac{GmV_u\rho}{R} = -\frac{GmMR^2}{R_0^3}$$

Die oberen Schichten können wir jetzt einfach analog zu vorhin aufsummieren:

$$dE_o = -\frac{Gm}{r} \cdot dM = -\frac{Gm}{r} \cdot \frac{3M}{R_0^3} \cdot r^2 \cdot dr = -\frac{3GmM}{R_0^3} \cdot r \cdot dr$$

$$\Rightarrow E_o = -\frac{3GmM}{R_0^3} \cdot \int_R^{R_0} r \cdot dr = -\frac{3GmM}{2R_0^3} \cdot \left[R_0^2 - R^2\right]$$

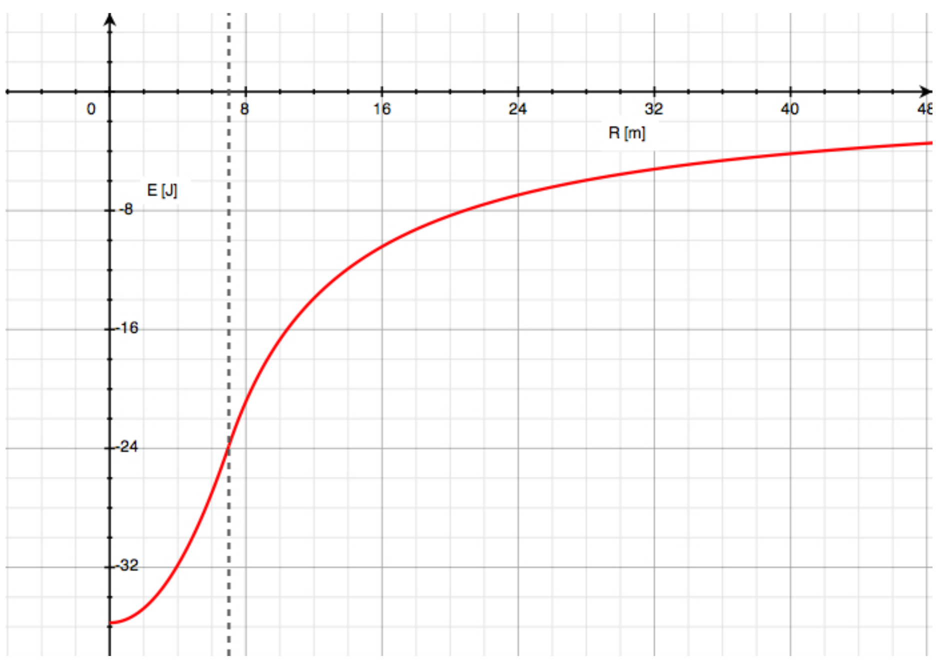
Als Summe ergibt sich die gesamte potentielle Energie aus:

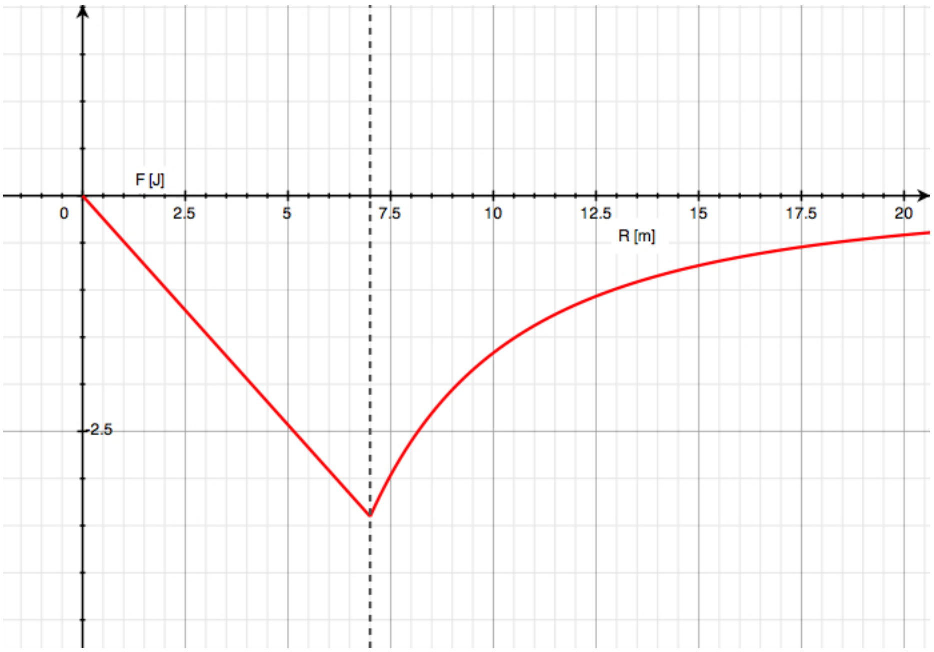
$$E_{pot} = \Sigma E = E_u + E_o = \frac{GmM}{2R_0^3} \cdot \left[R^2 - 3R_0^2\right]$$

$$\Rightarrow F = -grad(E_{pot}) = -\frac{GmMR}{R_0^3}$$

Graphische Darstellung Die erste Graphik stellt die potentielle Energie E in Abhängigkeit vom Abstand R einer Masse m vom Zentrum einer Vollkugel der Masse M und dem Radius R_0 dar. Die zweite stellt die entsprechende Kraft F dar.

$$m = 5Kg$$
$$M = 5 \cdot 10^{11} Kg$$
$$R_0 = 7m$$





Literatur

[1] Wolfgang Demtröder *Experimentalphysik 1*. Springer Verlag, 3. Auflage 2004