Das Flächenträgheitsmoment

Stilianos Louca

June 30, 2007

Contents

1 Einführung

1.1 Kurze Beschreibung des Problems

Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Berechnung von Flächenträgheitsmomenten. Er wendet sich vor allem an Studenten im 1 Fachsemester der Physik.

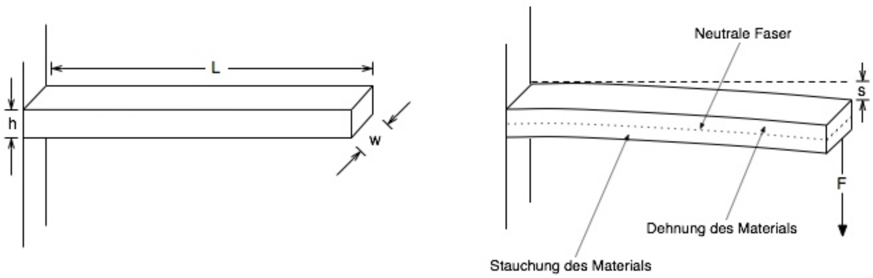
1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Was ist das Flächenträgheitsmoment

2.1 Woher kommt das Flächenträgheitsmoment

Betrachten wir einen isotropen Balken der Länge L, der Breite w und der höhe h. Der Balken sei am einen Ende fest befestigt, und am anderen Ende wirke eine Kraft F. Der Elastizitätsmodul des Materials sei E.



Die Abweichung s am freien Ende ist gegeben[1] durch:

$$s = \frac{FL^3}{3E \cdot I_A}$$

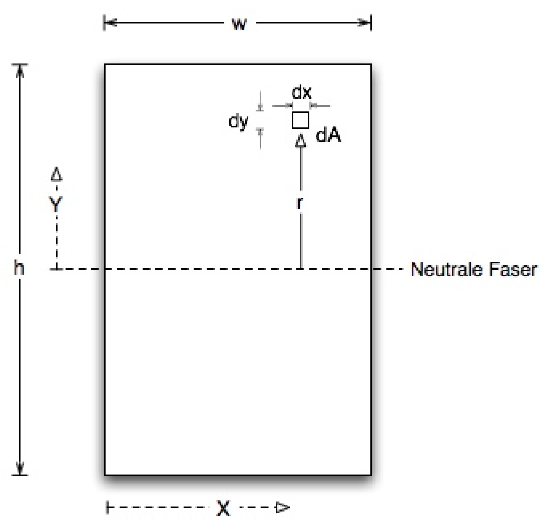
wobei I_A das so genannte Flächenträgheitsmoment der Querschnittfläche ist:

$$I_A = \int_A r^2 dA$$

Dieses Qerschnitt-beschreibendes Integral tritt auch bei vielen anderen Vorgängen auf, wie zum Beispiel bei Druckproblemen in Staudämmen.

2.2 Die Bedeutung des Flächenträgheitsmoments

Das FTM ist ein so genanntes *Flächenintegral*. Es werden also alle Flächenstückchen dA der Querschnittfläche mit einem *Gewichtsgebenden* Faktor r^2 aufsummiert,wobei r der jeweilige Abstand des Stückchens dA von der *neutralen Faser* ist. Diese neutrale Faser ist die interne Fläche die bei dem Biegungsvorgang weder gestaucht noch gedehnt wird. Betrachten wir die Querschnittfläche des ober erwähnten Balkens:



Sei $dA = dx \cdot dy$ ein Flächenstück an Stelle (x, y). Der Abstand[2] r von der neutralen Faser ist dabei gleich y. Das FTM ist die Aufsummierung über die gesamte Fläche A:

$$I_A = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 \cdot dy \cdot dx = \int_0^w \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \right] dx = \int_0^w \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx = \int_0^w \frac{h^3}{12} dx = \frac{wh^3}{12}$$

[1] Es ist nicht Sinn dieses Artikels diesen Zusammenhang herzuleiten

[2] Man sollte immer versuchen ein Koordinatensystem zu wählen wo unter anderem auch der Abstand r leicht darstellbar ist

Man kann sich das FTM als das *Trägheitmoment* der Fläche bezüglich einer Achse, nämlich des Schnittes der neutralen Faser mit der Fläche[3], vorstellen.
Beachte: Der FTM ist immer für eine Fläche bezüglich einer Achse gegeben. Ist diese Achse nicht erwähnt, so ist meist der Schnitt der neutralen Faser mit der Querschnittsfläche gemeint. Diese ist wiederum der jeweiligen Situation zu entnehmen. Beim FTM eines Körpers ist meist vom FTM seines Querschnittes die Rede.

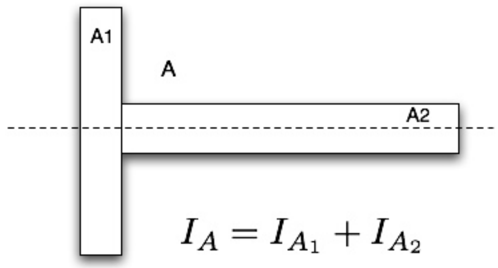
[3]Querschnittfläche und neutrale Faser liegen normalerweise senkrecht zu einander

3 Rechenregeln

3.1 Linearität

Flächenträgheitsmomente sind linear, das heisst setzt sich eine Fläche A aus mehreren Teilflächen $A_1, A_2, ..., A_n$ zusammen, so ist das Gesamte FTM gleich der Summe der partiellen FTM:

$$I_A = \sum_i I_{A_i}$$



Dies folgt unmittelbar aus der Definition:

$$I_A = \int_A r^2 dA = \int_{\sum A_i} r^2 dA = \sum \int_{A_i} r^2 dA$$

Tip: Dies gilt auch bei *negativen* Werten, das heisst, kann eine Fläche A als eine andere Fläche B mit einer Teilfläche C *rausgeschnitten* dargestellt werden, so ist:

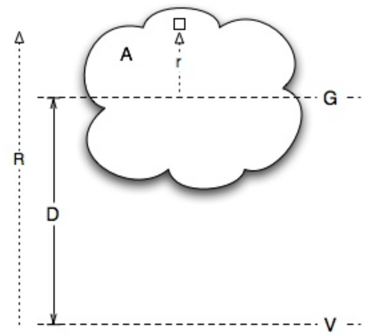
$$I_A = I_B - I_C$$

3.2 Der Satz von Steiner

Sei A eine Fläche und I_A ihr FTM bezüglich einer Achse G die durch den Flächenmittelpunkt geht.
Zur Erinnerung: Der Flächenmittelpunkt $\vec{S}$ einer Fläche ist analog zum Schwerpunkt eines Körpers definiert:

$$\vec{S} = \int_A \vec{r} \cdot dA$$

Gesucht ist jetzt das Flächenträgheitsmoment $\hat{I}_A$ dieser Fläche bezüglich einer zu G um den Betrag D parallel verschobenen Achse V.



$$\hat{I}_A = \int_A R^2 dA = \int_A (r+D)^2 dA = \int_A \left(r^2 + D^2 + 2rD\right) dA = \int_A r^2 dA + \int_A D^2 dA + 2\int_A rDdA = I_A + D^2 A + 2S$$

Da die Achse G durch den Flächenschwerpunkt geht, ist $S = 0$. Also:

$$\hat{I}_A = I_A + D^2 A$$

Diese Regel ist bekannt als *Der Satz von Steiner*.

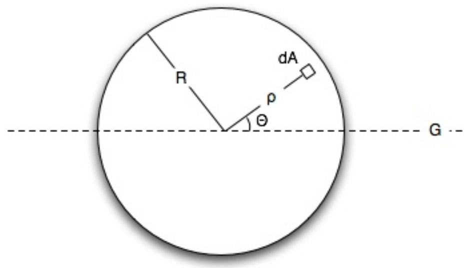
4 Rechenbeispiele

Mit Hilfe der beiden erwähnten Rechenregeln kann man oft Flächenträgheitsmomente von komplexen Querschnitten ausrechnen, indem man diese in kleinere Flächen aufteilt, deren FTM bereits bekannt sind.

4.1 Der Kreis

Gesucht ist das FTM I_K eines Kreises mit dem Radius R bezüglich seines Durchmessers G.

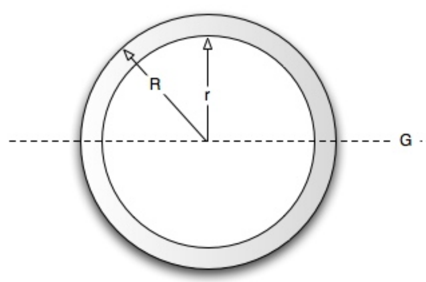
Lösung Es eignet sich hier Polarkoordinate zu benutzten. Ein Flächenelement $dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$ ist also gegeben durch einen Winkel θ und einem Abstand ρ vom Zentrum. Beachte: ρ ist nicht der Abstand von der Achse G!



$$I_K = \int_A r^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho \sin(\theta))^2 [\rho \cdot d\rho \cdot d\theta] = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \sin^2(\theta) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{R^4\pi}{4}$$

4.2 Der Ring

Gesucht ist das FTM I_R eines Ringes mit dem Innenradius r und dem außenradius R bezüglich seines Durchmessers G.

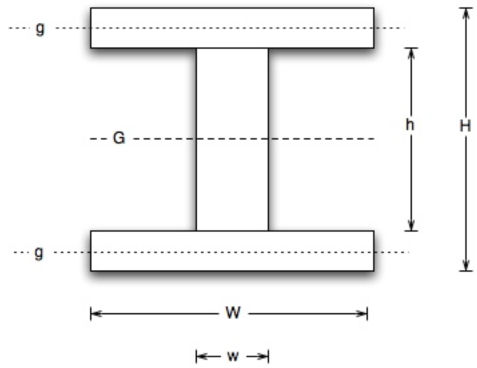


Hier wenden wir die Linearität des FTM und das vorige Ergebnis an. Das FTM I_R ist das FTM I_a des äuseren Kreises minus das FTM I_i des inneren Kreises:

$$I_R = I_a - I_i = \frac{R^4\pi}{4} - \frac{r^4\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^4 - r^4\right)$$

4.3 Der Doppel-T-Träger

Gesucht ist das FTM I_D folgenden doppel-T-Trägers bezüglich der Achse G.



Methode A: Man stelle sich die Fläche als eine Größere Fläche $H \times W$ vor, aus der zwei kleinere Teilflächen (aus den Seiten) entfernt wurden. Das FTM von Rechtecken wurde bereits in Abschnitt 2.2 hergeleitet.

$$I_D = \frac{WH^3}{12} - 2 \cdot \frac{\frac{(W-w)}{2} \cdot h^3}{12} = \frac{W}{12} \cdot \left[H^3 - h^3\right] + \frac{wh^3}{12}$$

Methode B: Die Fläche setzt sich zusammen aus 3 Teilflächen: Eine obere (I_o), eine mittlere (I_m) und eine untere (I_u). Für die mittlere gilt:

$$I_m = \frac{wh^3}{12}$$

Für die obere und untere wenden wir den Steinerschen Satz an. Die Verschiebung D der Achsen g bezüglich G ist in beiden Fällen:

$$D = \pm \left[\frac{h}{2} + \frac{(H-h)}{4}\right]$$

Daraus ergibt sich:

$$I_u = I_o = \left[\frac{(H-h)}{2}\right]^3 \cdot \frac{W}{12} + \left[\frac{h}{2} + \frac{(H-h)}{4}\right]^2 \cdot \frac{(H-h)}{2} \cdot W$$

$$= \frac{W}{12} \cdot \left[\frac{(H^3 - 3H^2h + 3Hh^2 - h^3)}{8}\right] + \frac{(h^2 + H^2 + 2hH)}{16} \cdot \frac{(H-h)}{2} \cdot W = \frac{W}{24} \cdot \left[H^3 - h^3\right]$$

Zusammengesetzt ergibt sich genau wie bei der ersten Methode:

$$I_D = I_m + I_o + I_u = \frac{W}{12}\left[H^3 - h^3\right] + \frac{wh^3}{12}$$