Biegung eines Balkens

Stilianos Louca

February 4, 2007

Contents

1 Einführung

1.1 Was dieser Artikel ist

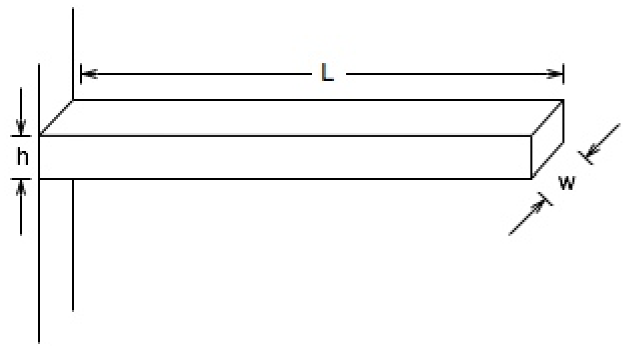
Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Biegung eines dünnen, langen, an einem Ende befestigten Stabes der durch eine Kraft am losen Ende um einen kleinen Winkel gebogen wird. Er wendet sich hauptsächlich an Physikstudenten im 1 Fachsemester.

1.2 Was dieser Artikel nicht ist

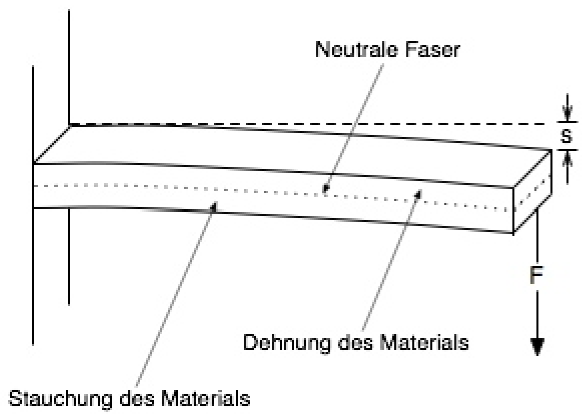
Dieser Artikel dient nicht der Herleitung oder Beschreibung mathematischer Theoreme oder Methoden. Mathematische Rechnungen werden daher nicht "mathematisch sauber" bewiesen sondern nur Physikalisch begründed. Dabei handelt es sich hier keineswegs um eine hochwertige wissenschaftliche Arbeit!

2 Problemstellung

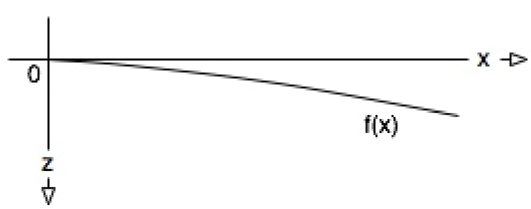
Betrachten wir einen dünnen isotropen langen Balken der Länge L mit dem Elastizitätsmodul E. Dieser Balken soll am einen Ende an einer steifen Wand befestigt sein.



Am loßen Ende wirke eine senkrechte Kraft F nach unten. Es wirke außerdem keine andere Kraft auf das System. Der Balken wird also nach unten gebogen. Dabei dehnen sich die oberen Schichten aus wobei sich die unteren Schichten stauchen.



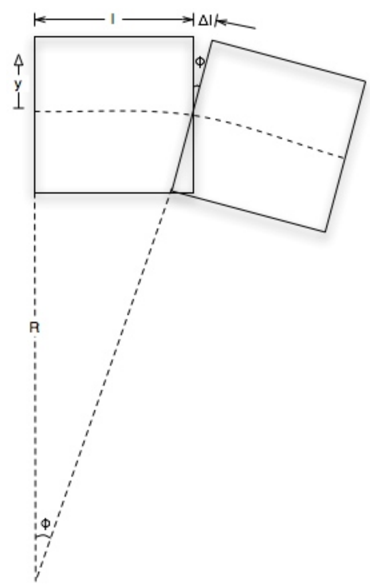
Gesucht ist die Funktion f(x) die die form dieses Balkens beschreibt (bzw. der neutralen Faser). Außerdem wollen wir die axiale Spannung berechnen die innerhalb des Balkens wirkt.



3 Problemlösung

3.1 Zerstückelung

Wir stellen uns den Balken als eine Zusammensetzung von vielen kleinen Balken bzw. Würfelchen vor, und lassen dann diese Anzahl von Balken zu unendlich gehen. Die Position dieser Teil-Balken sei durch die X Koordinate gegeben. Jeder dieser Teil-Balken verdreht sich zum nčhsten um den Winkel ϕ



3.2 Berechnung des Drehmomentes an Position X

Diese relative Verdrehung der Teil-Balken zu einander verursacht bzw. erfordert einen Drehmoment M. Wir wollen jetzt mal diesen Drehmoment ausrechnen. An einen beliebigen Punkt im Abstand Y von der neutralen Faser findet eine Dehnung, bzw. Stauchung $\Delta l = Y \cdot \phi$ statt. Es muss also eine Kraft dF bzw. eine Spannung σ auf das Flächenstück dA wirken die diese Stauchung verursacht. Der Drehmoment dM dieser Kraft ergibt sich als:

$$dM = dF \cdot Y = (\sigma \cdot dA) \cdot Y = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \cdot Y \cdot dA = \frac{\phi}{l} \cdot E \cdot Y^2 \cdot dA$$

$$l = \phi \cdot R \Rightarrow \frac{\phi}{l} = \frac{1}{R} \Rightarrow dM = \frac{E}{R} \cdot Y^2 \cdot dA$$

$$\Rightarrow M = \frac{E}{R} \cdot \int_{-d}^{d} Y^2 \cdot dA, \; d := \frac{h}{2}$$

$$\int_{-d}^{d} Y^2 \cdot dA =: I_A$$

Der Term I_A ist der so-genannte Flächenträgheitsmoment und taucht ähnlich wie hier auch in allen anderen Biegungsproblemen auf. In unserem Fall ist er relativ leicht zu berechnen:

$$I_A = \int_{-d}^{d} Y^2 w \cdot dy = 2w\frac{d^3}{3} = \frac{h^3 w}{12}$$

Dieser Drehmoment M wird durch die Kraft F im abstand (L-X) (am losen Ende) bewirkt. Es muss also gelten:

$$M = \frac{E \cdot I_A}{R} = F \cdot (L - x)$$

3.3 Die Differentialgleichung

Aus der Differentialgeometrie ist bekannt dass für eine gegebene stetige Funktion f(x) der Krümmungsradius R an einer stelle X gegeben ist durch:

$$R = \frac{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Wir werden nur geringe Biegungen betrachten. Wir können also die Näherung $f'(x) \approx 0$ machen. Außerdem lassen wir jetzt $l \to 0$ gehen so dass R genau der Krümmungsradius der jetzt stetigen Funktion f der neutralen Faser ist. Dann gilt:

$$F \cdot (L - x) = E \cdot I_A \cdot f''(x)$$

Diese innhomogene Differentialgleichung 2er Ordnung ist jetzt zu lösen. Die algemeine Lösung setzt sich als eine Linearkombination der Lösung der homogenen Gleichung plus einer speziellen Lösung der innhomogenen zusammen.

$$\begin{aligned}
&Homogene: \; E \cdot I_A \cdot f'' = 0 \\
&Ansatz: \; f_h(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow E \cdot I_A \cdot \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\
&\Rightarrow f_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x, \; C_1, C_2 : const
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Inhomogene: \; E \cdot I_A \cdot f''(x) = F \cdot (L - x) \\
&Ansatz: \; f_{sp}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 \Rightarrow f''_{sp}(x) = 6\alpha x + 2\beta \overset{!}{=} \frac{F}{E \cdot I_A} \cdot (L - x) \\
&Komponentenvergleich \to \alpha = -\frac{F}{6 \cdot E \cdot I_A}, \; \beta = \frac{FL}{2 \cdot E \cdot I_A}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = f_h(x) + f_{sp}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \frac{FL}{2 \cdot E \cdot I_A} \cdot x^2 - \frac{F}{6 \cdot E \cdot I_A} \cdot x^3$$

Aus den Anfangsbedingungen wissen wir dass $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \\
&\Rightarrow f(x) = \frac{F}{E \cdot I_A} \cdot \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)
\end{aligned}$$

Das Balkenende (x=L) biegt sich um:

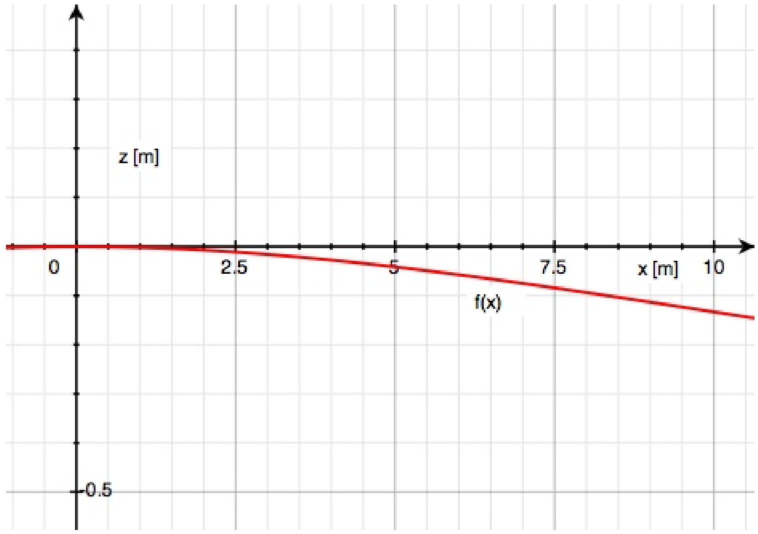
$$s = f(L) = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_A}$$

3.4 Graphische Darstellung

Wollen wir uns mal anschauen wie das ganze wirklich aussieht. Die folgende Kurve [1] entspricht der Form der neutralen Faser für:

$$\begin{aligned}
L &= 10 \; m \\
F &= 400 \; N \\
E &= 10^{11} \; Pa \\
I_A &= 10^{-5} \; m^4
\end{aligned}$$

[1] In diesem Fall sind sowohl die Achsen als auch die Funktion invertiert



3.5 Maximale Spannung

Oft ist es nützlich zu wissen unter welcher maximalen Spannung der Balken gesetzt wird, wirke eine Kraft F auf ihn. Wir haben gesehen dass an jedem Punkt des Balkens, bzw. am Rand jedes Teil-Balkens eine Spannung σ wirkt. Diese ergab sich für eine bestimte Position X aus:

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{\phi \cdot Y}{l} \cdot E = \frac{Y \cdot E}{R}$$

wobei Y der Abstand von der neutralen Faser ist. Außerdem:

$$Y_{max} = \pm d = \pm \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_{max}(x) = \frac{h \cdot E}{2 \cdot R}$$

Doch R können wir jetzt problemlos ausrechnen:

$$\frac{1}{R} \approx f''(x) = \frac{F}{E \cdot I_A} \cdot (L - x)$$
$$\Rightarrow \sigma_{max}(x) = \frac{F \cdot h}{2 \cdot I_A} \cdot (L - x)$$

Man sieht dass die größte Spannung bzw. der kleinste Krümmungsradius am festen Ende (x=0) vorhanden ist.

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{F \cdot h \cdot L}{2 \cdot I_A}$$

Für unseren Balken also:

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot F \cdot L}{h^2 \cdot w}$$

References

[1] Wolfgang Demtröder *Experimentalphysik 1*. Springer Verlag, 3.Auflage 2004