Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07

$\boxed{\text{H 13}}$

Abgabetermin: 1.02.07

(35) Eine Lorentz-Invariante **2 P.**

In Aufgabe (34) hatten Sie gefunden, daß das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B}$ Lorentz-invariant ist, indem Sie es als $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ schrieben. Zeigen Sie die Lorentz-Invarianz nochmals unter Benutzung der Transformationsgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

(36) Strahlung einer Stabantenne **8 P.**

In der Vorlesung wurde (oder wird) gezeigt, daß eine partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box A^\mu = 4\pi j^\mu / c$ in der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ durch das sogenannte retardierte Potential

$$A^\mu(ct, \vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \, \frac{j^\mu\big(ct - |\vec{r} - \vec{r}\,'|, \vec{r}\,'\big)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

gegeben ist. In großem Abstand zu einer lokalisierten Ladungs- und Stromverteilung läßt sich der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ nach Potenzen von r'/r entwickeln: $|\vec{r} - \vec{r}\,'| = r - \vec{r} \cdot \vec{r}\,'/r + O(r'^2/r)$. In dieser sogenannten Fernzone kann man das Potential nähern durch den Ausdruck

$$A^\mu(ct, \vec{r}) \simeq \frac{1}{cr} \int d^3 r' \, j^\mu\big(ct - r + \vec{e}_r \cdot \vec{r}\,', \vec{r}\,'\big) \ .$$

Betrachten Sie nun eine Antenne in Form eines geraden dünnen Stabes der Länge L, der vom Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ durchflossen wird:

$$\vec{\jmath}(t, \vec{r}) = I(t)\, \delta(x)\, \delta(y)\, \theta(L/2 - |z|)\, \vec{e}_z \ .$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte.
b) Berechnen Sie die Potentiale $\phi(t, \vec{r})$ und $\vec{A}(t, \vec{r})$ in der Fernzone.
c) Wie lauten $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$ in derselben Näherung?
d) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(t, \vec{r})$ und die mittlere in das Raumwinkelelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \lim_{r \to \infty} r^2 \big\langle \vec{S} \cdot \vec{e}_r \big\rangle \ ,$$

wobei $\langle f(t) \rangle = T^{-1} \int_T dt\, f(t)$ für periodische Funktionen $f(t) = f(t+T)$. Skizzieren Sie die Winkelabhängigkeit von $\langle dP/d\Omega \rangle$ für den Fall $\omega L/c \ll 1$.

Anmerkung: Lehramtskandidaten dürfen statt der Aufgabenteile (c) und (d) von (36) die folgende Aufgabe bearbeiten:

(LA8) Gleichzeitigkeit **5 P.**

Zwei relativ zueinander bewegte Beobachter stimmen nicht darüber überein, welche Ereignisse gleichzeitig sind zu einem gegebenen Ereignis E. Die zu E gleichzeitigen Ereignisse können dadurch aufgefunden werden, daß man zu einem Zeitpunkt T_- ein Lichtsignal zu E schickt und den Zeitpunkt T_+ feststellt, an dem das reflektierte Signal wieder eintrifft. Der Zeitpunkt des zu E gleichzeitigen Ereignisses auf der eigenen Weltlinie ist dann durch den Mittelwert $(T_+ + T_-)/2$ von Sende- und Empfangszeit gegeben. Was ist die Entfernung von E zum Beobachter?
Bestimmen Sie graphisch in einem (t, x)-Diagramm alle Ereignisse, die für einen in diesem System ruhenden Beobachter und für einen relativ dazu bewegten Beobachter gleichzeitig sind zu einem Ereignis E, welches sich nicht auf einer der beiden Weltlinien der Beobachter befindet.