Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07

H 12

Abgabetermin: 25.01.07

(32) Relativistische Geschwindigkeitsaddition 3 P.

Betrachten Sie drei Inertialsysteme I, I' und I'', wobei sich I' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{n}$ relativ zu I bewegen möge und I'' mit der Geschwindigkeit $\vec{v}' = v'\vec{n}$ relativ zu I'. Dabei ist $\vec{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}''$, mit der sich I'' relativ zu I bewegt, aus der Matrix des zugehörigen Lorentz-Boosts. Welche maximale Geschwindigkeit ist möglich unter der Bedingung $v, v' \leq c$?

(33) Zeitdilatation 3 P.

Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ passiert ein Raumschiff (I') unsere Erde (I) mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Zur Zeit $t_0 = a/c$ schicken wir ihm ein Lichtsignal hinterher. Später teilt die Raumschiffcrew uns per Funk mit, das Signal sei zur Zeit $t'_1 = na/c$ mit $n > 1$ bei ihnen eingetroffen. Welche Geschwindigkeit v hatte das Raumschiff und wo ($x_1 = ?$) erreichte es das Signal?

(34) Dualer Feldstärketensor und Lorentz-Invarianten 5 P.

Zeigen Sie, daß der total antisymmetrische Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ mit $\varepsilon^{0123} = 1$ invariant unter eigentlichen ($\det \Lambda = 1$) Lorentz-Transformationen ist. Damit kann der duale Feldstärketensor definiert werden:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \ .$$

Drücken Sie die Komponenten $\tilde{F}^{\mu\nu}$ durch die von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus und zeigen Sie, daß die homogenen Maxwell-Gleichungen durch $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ gegeben sind.

Wie lauten die manifest Lorentz-invarianten Skalare

$$s = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad p = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

als Funktionen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$? Zeigen Sie, daß p als totale Ableitung $\partial_\mu K^\mu$ geschrieben werden kann.