

Abgabetermin: 18.01.07

(29) Doppelbrechung

6 P.

Wir betrachten die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen in einem homogenen, anisotropen Medium mit $\mu = 1$, das durch einen dielektrischen Tensor ϵ_{ij} mit den Eigenwerten ϵ_i charakterisiert ist. Wählt man die Hauptachsen des Tensors als Koordinatenachsen, dann gilt $D_i = \epsilon_i E_i$. Es handle sich um einen optisch einachsigen Kristall mit $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_o$ und $\epsilon_z = \epsilon_e$.

a) Zeige, dass für ebene Wellen mit Frequenz ω und Wellenzahlvektor \vec{k} gilt: (2)

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = 0.$$

b) Zeige, dass für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ zwei verschiedene Ausbreitungsmoden mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v = \omega/k$ existieren. (4)

Bem: obige Gleichung ist eine lineare Gleichung für \vec{E} . Die Bedingung für ihre Lösbarkeit kann für uniaxiale Medien faktorisiert werden.

(30) Zylindrischer Hohlleiter

8 P.

Gegeben sie ein kreiszylindrischer Hohlleiter mit Radius a , dessen Wände als ideal leitend angenommen werden können.

a) Bestimme die Wellentypen, die sich in dem Hohlleiter ausbreiten können. Schreibe dazu die Wellengleichung für E_z bzw. B_z in Zylinderkoordinaten und beachte die Randbedingungen. Gib die restlichen Komponenten von \vec{E} und \vec{B} an. (3)

b) Zeige, dass die möglichen Moden in zwei Klassen eingeteilt werden können. TE-Moden mit $E_z = 0$ und TM-Moden mit $B_z = 0$. Zeige, dass es für beide Moden jeweils eine Grenzfrequenz gibt, unterhalb derer keine Wellenausbreitung möglich ist. (2)

Hinweis: Die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 - n^2) f = 0$$

wird von den Besselfunktion $J_n(x)$ und der Neumannfunktion $Y_n(x)$ gelöst. J_n ist überall regulär, während Y_n für $x \rightarrow 0$ divergiert. Die erste Nullstelle von J_0 liegt etwa bei 2.4, die erste Nullstelle von J'_0 etwa bei 1.8.

c) Betrachte nun einen coaxialen Hohlleiter („Koaxkabel“), der innere Leiter habe den Radius a , der äussere den Radius b . Zeige, dass sich in diesem Fall TE-Moden ausbreiten können, für die sowohl E_z als auch H_z verschwinden. Bestimme die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen. Gibt es in dieser Situation auch eine untere Grenzfrequenz? (3)

Bemerkung: Sie können für die Felder ansetzen: $\vec{E} = e^{i\omega t + im\phi \pm ikz} \vec{E}(\rho)$ und analog für \vec{B} .

(29) Für Lehramtskandidaten:

5 P.

Anstelle von 30b) und 30c) können Sie in der Aufgabe (29) begründen, warum für $\epsilon_o \neq \epsilon_e$ Doppelbrechung (Aufspaltung in ordentlichen und außerordentlichen Strahl) auftritt. Für Kalzit sind bei der optischen Wellenlänge von 590 nm die Brechungsindizes $n_o = 1.658 > n_e = 1.486$ und für Quarz ist $n_o = 1.544 < n_e = 1.553$. Was folgt aus $n_o < n_e$ bzw. $n_o > n_e$ dies für die Polarisierungen der beiden Strahlen