Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07 $\boxed{\text{H 9}}$

Abgabetermin: 21.12.06

(24) Zeitunabhängige Stromdichte **3 P.**

Zeigen Sie, daß für eine zeitunabhängige Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ die Ladungsdichte die Form $\varrho(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r},0) + \dot{\varrho}(\vec{r},0)t$ hat und daß das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

nach Biot–Savart auch die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen (mit welchem $\vec{E}$-Feld?) im Vakuum erfüllt.

(25) Plattensender **3 P.**

Eine in z-Richtung polarisierte ebene elektromagnetische Welle mit Amplitude E_0 und Kreisfrequenz ω propagiere im gesamten rechten Halbraum ($x > 0$) nach rechts und im gesamten linken Halbraum nach links. An der yz-Ebene mögen beide Wellen gleiche Phase haben. Zu welcher Ladungs- und Stromdichte sind die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt? (Verwenden Sie Stufenfunktionen, um zunächst das $\vec{E}$-Feld niederzuschreiben.)

(26) Zylinderwellen **6 P.**

Ein unendlich langer und dünner Draht entlang der z-Achse werde von einem Strom $I(t)$ durchflossen und sende Zylinderwellen aus mit folgendem elektrischen Feld:

$$\vec{E}(\varrho,t) = \vec{e}_z\, E_0 \int_0^\infty du\ \mathrm{e}^{-\varepsilon u^2} \sin\alpha(\varrho,t;u) \quad \text{mit} \quad \alpha(\varrho,t;u) = k(\varrho\cosh u - ct)\ .$$

Hierbei ist $\mathrm{e}^{-\varepsilon u^2}$ mit $\varepsilon \to +0$ ein konvergenzerzeugender Faktor.

a) Welches Magnetfeld $\vec{B}$ gehört zu diesem elektrischen Feld?

b) Zeigen Sie, daß $\vec{E}$ die Wellengleichung im Vakuum erfüllt.

c) Bestimmen Sie den Strom $I(t)$. Dabei können Sie folgende Identität verwenden:

$$\partial_u\Big(\frac{\sinh u}{\cosh u}\,\cos\alpha\Big) = \frac{\cos\alpha}{\cosh^2 u} + k\varrho\,\frac{\sin\alpha}{\cosh u} - k\varrho\,\cosh u\,\sin\alpha$$

mit $\alpha(\varrho,t;u)$ wie oben.

(Das u-Integral in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ kann nicht elementar ausgewertet werden. Dies ist erst in den Aufgabenteilen b) und c) mit Hilfe des konvergenzerzeugenden Faktors möglich.)

(LA4) Wellen **6 P.**

a) Das elektrische Feld einer stehenden elektromagnetischen Welle ist durch

$$\vec{E}(x,t) = 2E_0\sin(kx)\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$$

gegeben. Leiten Sie den Ausdruck für $\vec{B}(x,t)$ her. Fertigen Sie eine Skizze der stehenden Welle an.

b) Beschreiben Sie vollständig den Polarisationszustand folgender Wellen:

(1) $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\, \vec{e}_x - E_0 \cos(kz - \omega t)\, \vec{e}_y$
(2) $\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\, \vec{e}_x - E_0 \sin(kz - \omega t - \pi/4)\, \vec{e}_y$
(3) $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\, \vec{e}_x + E_0 \cos(kz - \omega t + \pi/2)\, \vec{e}_y$

c) Eine Welle sei gegeben durch $\vec{E}(z,t) = E_0 \left[\cos(\omega t)\, \vec{e}_x + \cos(\omega t - \pi/2)\, \vec{e}_y\right] \sin(kz)$. Um welche Art von Welle handelt es sich? Zeichnen Sie eine Skizze, die ihre wichtigsten Merkmale enthält.

Anmerkung: Lehramtskandidaten dürfen statt Aufgabe (26) die Aufgabe (LA4) bearbeiten.