Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07

H 6

Abgabetermin: 30.11.06

(16) Dielektrischer Zylinder **7 P.**

Ein unendlich langer, homogener dielektrischer (ε_2) Zylinder mit Radius R werde so in ein Dielektrikum ($\varepsilon_1 \neq -\varepsilon_2$) eingebettet, daß seine Achse senkrecht steht auf dem dort vorhandenden homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$. Es soll das neue elektrische Feld bestimmt werden:

Lösen Sie die Laplace-Gleichung für das Potential in Zylinderkoordinaten durch den Separationsansatz $\Phi(\vec{r}) = f(\varrho)g(\varphi)$. Zeigen Sie, daß es im Außen- bzw. Innenraum die Form

$$\Phi_1(\vec{r}) = -E\varrho\cos\varphi + \sum_{n\geq 1} \beta_n\, \varrho^{-n}\cos(n\varphi)\ , \qquad \Phi_2(\vec{r}) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n\, \varrho^{n}\cos(n\varphi)$$

hat, und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten α_n und β_n aus den Anschlußbedingungen an der Grenzfläche. Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien in einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse. Berechnen Sie dann das elektrische Feld.

(17) Anisotropes Dielektrikum **3 P.**

Zeigen Sie, daß das Potential einer Punktladung q in einem homogenen Dielektrikum mit positiv definitem symmetrischem Dielektrizitätstensor ε ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$) durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{\det\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{\vec{r}^{\,t}\varepsilon^{-1}\vec{r}}}\ .$$

Verwenden Sie dabei, daß man stets eine invertierbare Matrix M finden kann mit $\varepsilon = M^tM$ (warum gilt dies?), und gehen Sie zu neuen Koordinaten $\vec{r} = M^t\vec{r}\,'$ über.

(18) Endliche Selbstenergie **3 P.**

Born und Infeld haben in den 1930er Jahren eine nichtlineare Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichungen konstruiert mit dem Ziel, einer Punktladung eine endliche Selbstenergie zu geben. Dies soll hier nachvollzogen werden.

In Aufgabe (15) hatten Sie die Born–Infeld-Beziehung (für verschwindendes Magnetfeld)

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + (\vec{D}/b)^2}}$$

gefunden, welche auch im Vakuum gelten möge. Bestimmen Sie aus $4\pi\delta u = \delta\vec{D}\cdot\vec{E}$ die elektrostatische Energiedichte $u(\vec{D})$. Die Integrationskonstante fixieren Sie dabei durch Vergleich mit dem Ausdruck in der Maxwell-Elektrodynamik, der im Grenzfall $b \to \infty$ herauskommen muß. (Die Variation δ wirkt wie ein Differentialoperator.)

Wie lautet $\vec{D}$ für eine Punktladung q im Ursprung? Zeigen Sie, daß das zugehörige Feld $\vec{E}$ am Ort der Ladung endlich ist, und überprüfen Sie, ob es $\nabla\times\vec{E} = 0$ erfüllt. Aus $\vec{D}$ berechnen Sie dann die Selbstenergie U. Dabei dürfen Sie das folgende Integral verwenden:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}+x^2} = \frac{\big(\Gamma(1/4)\big)^2}{6\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}236\ .$$