Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07 $\boxed{\text{H 5}}$

Abgabetermin: 23.11.06

(13) Symmetrien und Multipole **2 P.**

Man kann Funktionen $f(\vec{r})$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln gemäß

$$f(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} f_{\ell m}(r)\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \ , \qquad f_{\ell m}(r) = \int d\Omega\; Y^*_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\, f(\vec{r}) \ .$$

Welche Koeffizienten $f_{\ell m}(r)$ verschwinden in den Fällen $f(\vec{r}) = f(r,\vartheta)$, $f(\vec{r}) = f(-\vec{r})$ und $f(\vec{r}) = -f(-\vec{r})$?

(14) Geladene Kreisscheibe **5 P.**

Gegeben sei eine unendlich dünne Kreisscheibe mit Radius R, die homogen mit der Flächenladungsdichte σ belegt ist.

a) Geben Sie die Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ in Kugel- und Zylinderkoordinaten an. Berechnen Sie aus dieser das elektrostatische Potential auf der Symmetrieachse als Funktion des Abstands.

b) Bestimmen Sie die Multipolkoeffizienten $q_{\ell m}$ und das Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ für $r > R$ bis einschließlich $\ell = 3$. (Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe (13), um sich zu überlegen, welche $q_{\ell m}$ verschwinden.)

c) Berechnen Sie das Potential für $r > R$ exakt durch Entwicklung nach Legendre-Polynomen und Vergleich mit dem Resultat aus a). Benutzen Sie dabei die Identität

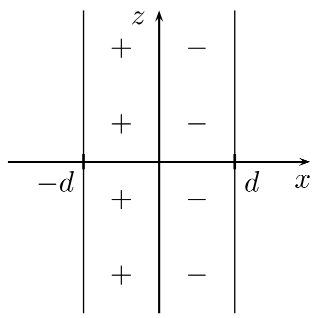
$$\sqrt{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} t^{2k} \ .$$

(Es ist $\binom{z}{w} = \Gamma(z+1)/\Gamma(w+1)\,\Gamma(z-w+1)$, wobei die Gamma-Funktion die Eigenschaft $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ hat. Insbesondere gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.)

(15) Born–Infeld Kondensator **5 P.**

Zwei Platten der Fläche F und Dicke d ($d^2 \ll F$) werden, getrennt durch eine dünne isolierende Schicht, zusammengeklebt. In der linken (rechten) Platte sei die Ladung $+Q$ ($-Q$) homogen verteilt:

$$\varrho_f(x) = -\frac{Q}{Fd}\,\mathrm{sgn}(x)\,\theta(d-|x|) \ .$$



Das Plattenmaterial möge die Eigenschaft haben, daß die dielektrische Verschiebung $\vec{D}(\vec{r})$ nichtlinear vom elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ abhängt:

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1-(\vec{E}/b)^2}} \ .$$

Drücken Sie $\vec{E}$ als Funktion von $\vec{D}$ aus. Welche Bedeutung hat die Konstante b? Berechnen Sie das Potential $\Phi(x)$ (Es gelten die Beziehungen $\nabla\cdot\vec{D} = 4\pi\varrho_f$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$. Wählen Sie die Integrationskonstante so, daß $\Phi(0) = 0$. Sinnvolle Abkürzung: $V_\infty = 4\pi Qd/F$.) und die Kapazität $C = Q/V$ mit $V = \Phi(-d) - \Phi(d)$. Bestimmen Sie den Grenzwert $C_\infty = \lim_{b\to\infty} C$ und zeigen Sie, daß C geschrieben werden kann als

$$C = \frac{C_\infty}{1-(V/2bd)^2} \ .$$

(LA2) Integralsätze **5 P.**

Beweisen Sie den Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{A})$$

für ein achsenparalleles Rechteck F in der xy-Ebene, wobei $\vec{A}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld ist.

Man bestimme die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ einer Kugel vom Radius R, deren Volumen gleichförmig geladen ist. Die Gesamtladung der Kugel sei Q.

Anmerkung: Lehramtskandidaten dürfen statt Aufgabe (15) die Aufgabe (LA2) bearbeiten.