Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07

H 4

Abgabetermin: 16.11.06

(11) Geladenes Kugelsegment **9 P.**

Einer Hohlkugel vom Radius R sei ein rundes Segment um den Nordpol, das sich bis zum Breitenwinkel $\vartheta = \alpha$ erstreckt, entfernt worden. Die verbleibende Oberfläche sei gleichmäßig mit der Ladung q belegt.

a) Bestimmen Sie die Konstante C in der Ladungsdichte

$$\varrho(\vec{r}) = C\,\delta(r-R)\,\theta(\cos\alpha - \cos\vartheta)\ .$$

Berechnen Sie Dipol- und Quadrupolmoment und daraus das elektrostatische Potential für $r > R$ bis einschließlich Ordnung $O(R^3/r^3)$. (Sie können alle Komponenten des Quadrupoltensors auf einmal behandeln, indem Sie diesen als 3×3-Matrix $Q = \int d^3r\,\varrho(\vec{r})\,(\vec{r}\,\vec{r}^{\,t} - \frac{1}{3}r^2\mathbb{1})$ mit Zeilenvektor $\vec{r}^{\,t}$ schreiben.)

b) Nun soll das Potential exakt bestimmt werden: Gehen Sie von der Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\, Y_{\ell m}^*(\vartheta',\varphi')$$

aus, um zu zeigen, daß das Potential außerhalb der Kugel durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{q}{1+\cos\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \frac{R^{\ell}}{r^{\ell+1}}\, P_\ell(\cos\vartheta)\left[P_{\ell+1}(\cos\alpha) - P_{\ell-1}(\cos\alpha)\right]\ .$$

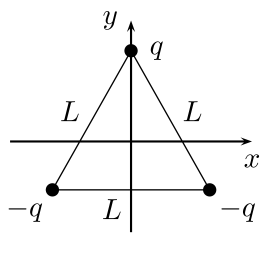
Dabei dürfen Sie die (leicht herzuleitende) Identität

$$\partial_z P_{\ell+1}(z) - \partial_z P_{\ell-1}(z) = (2\ell+1)\, P_\ell(z)$$

verwenden, welche die Legendre-Polynome $P_\ell(z) = \partial_z^\ell (z^2-1)^\ell / 2^\ell \ell!$ für $\ell > 0$ erfüllen. Vergleichen Sie mit der obigen Näherung, indem Sie in $\Phi(\vec{r})$ nur Summanden bis $\ell = 2$ berücksichtigen. (Das Potential innerhalb der Kugel erhält man aus obiger Formel durch Vertauschen von r und R.)

(12) Multipole **3 P.**

Bestimmen Sie Dipol- und Quadrupolmoment bezüglich des Schwerpunkts der skizzierten Anordnung von Punktladungen, welche die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge L bilden.



(LA1) Feld und Potential **5 P.**

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = (2\alpha x + \beta y, \beta x, \gamma)$ mit reellen Konstanten α, β, γ. Welchen Bedingungen müssen α, β und γ genügen, damit $\vec{E}(\vec{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist? Bestimmen Sie ein Potential $\Phi(\vec{r})$, für das gilt $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$. Ist $\Phi(\vec{r})$ eindeutig bestimmt? Geben Sie gegebenenfalls weitere Bedingungen an, denen $\Phi(\vec{r})$ genügen muß, um eindeutig bestimmt zu sein. Stellen Sie das Feld $\vec{E}$ sowie einige Äquipotentialflächen von Φ für von Ihnen gewählte Werte für α, β und γ mit Hilfe eines Computers graphisch dar.

Anmerkung: Lehramtskandidaten dürfen statt (11.b) die Aufgabe (LA1) bearbeiten. Informationen zum Computer-Pool der Fakultät findet man unter http://www.pafpool.uni-jena.de.