Übungen zur Elektrodynamik WS 06/07

$\boxed{\text{H 3}}$

Abgabetermin: 9.11.06

(8) Spiegelladungen **2 P.**

Eine Punktladung q befinde sich an der Stelle $\vec{r}_0 = (a, b, 0)$ mit $a > b > 0$ gegenüber zwei unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatten in den Ebenen $y = 0$ bzw. $y = x$. Das Potential im Bereich $x \geq y \geq 0$ kann mit Hilfe der Spiegelladungsmethode bestimmt werden. Skizzieren Sie die Verteilung der nötigen Spiegelladungen und geben Sie deren Positionen $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ und Ladungen $q_1, \ldots, q_n$ an.

(9) Ein Dirichlet-Randwertproblem **7 P.**

Eine Metallplatte auf Potential $+\phi_0$ fülle die Halbebene $y = 0$, $x > 0$ aus, eine weitere Platte auf Potential $-\phi_0$ die Halbebene $x = 0$, $y > 0$. Es soll das elektrische Feld im Quadranten $x, y \geq 0$ bestimmt werden.

Anschaulich sollte klar sein, wie die Feldlinien verlaufen. Skizzieren Sie diese und auch die Schnitte der Äquipotentialflächen mit der xy-Ebene. Das Potential in Zylinderkoordinaten müßten Sie danach direkt hinschreiben können. Aus diesem berechnen Sie dann $\vec{E}(\vec{r})$.

Jetzt soll das Problem nochmals mit der Methode der Greenschen Funktionen gelöst werden. Dazu verschaffen Sie sich zuerst die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ des Laplace-Operators, welche auf den beiden Metallplatten verschwindet, mit Hilfe der Spiegelladungsmethode. ($\phi_0 = 0$ setzen, eine punktförmige Einheitsladung im Quadranten $x, y > 0$ platzieren, Spiegelladungen bestimmen und das zugehörige Potential niederschreiben. Nützliche Notation: $x_\pm = x \pm x'$ etc.) Mit dieser Funktion können Sie nun das Potential, und damit das elektrische Feld, aus der allgemeinen Formel für Dirichlet-Randwertprobleme berechnen. (Eine hilfreiche Identität: $\partial_x \left[x(x^2+a)^{-1/2}\right] = a(x^2+a)^{-3/2}$.) Stimmt das Resultat mit dem zuvor gewonnenen überein?

(10) Inversion an der Sphäre **3 P.**

Das Potential $\Phi(r, \Omega)$ möge die Poisson-Gleichung zu gegebener Ladungsdichte $\varrho(r, \Omega)$ lösen. Zu welcher Ladungsdichte $\hat{\varrho}(r, \Omega)$ erfüllt dann

$$\hat{\Phi}(r, \Omega) = \frac{a}{r}\,\Phi(a^2/r, \Omega)$$

die Poisson-Gleichung? (Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet $\Delta = r^{-1}\partial_r^2\, r + r^{-2}\Delta_\Omega$, wobei $\Omega \equiv (\vartheta, \varphi)$ den Raumwinkel bezeichnet.)