

(1) Eine Darstellung der Delta-Distribution

4 P.

Zeigen Sie, daß der Funktionengrenzwert

$$D(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$$

eine Darstellung der Delta-Distribution $\delta(x)$ liefert, indem Sie das Produkt mit einer beliebigen Testfunktion über ein beliebiges Intervall $[-a, b]$ mit $a, b > 0$ integrieren. (Eine geeignete Substitution und Ausführen des Limes führt zum Ziel.)

Die kontinuierliche Version der Identität $\sum_k \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$ lautet

$$\int dx \delta(a-x) \delta(x-b) = \delta(a-b) .$$

Beweisen Sie dies, indem Sie

- a) obige Darstellung $D(x)$ verwenden, um das Integral explizit zu berechnen, und
- b) die definierende Eigenschaft der Delta-Distribution verwenden. (Also über eine Testfunktion integrieren.)

(2) Fourier-Transformation der Delta-Distribution

3 P.

Zeigen Sie, daß

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \varepsilon|k|} = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \equiv D_\varepsilon(x) , \quad \varepsilon > 0 ,$$

indem Sie von der Reihendarstellung des Cosinus Gebrauch machen. Wie in Aufgabe 1 überprüfen Sie anschließend, daß $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon(x)$ eine Darstellung der Delta-Distribution ist. Aus der Stammfunktion von $D_\varepsilon(x)$ gewinnen Sie zudem eine Darstellung der Stufenfunktion $\theta(x)$.

(3) Faltung und Integralgleichungen

5 P.

Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int dy f(y) g(x-y) .$$

Bestimmen Sie die Fourier-Transformation von $f * g$. Betrachten Sie die Integralgleichung

$$f(x) = g(x) - \int dy K(x-y) f(y) ,$$

wobei Inhomogenität $g(x)$ und Kern $K(x)$ gegeben und Fourier-transformierbar seien. Geben Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der inhomogenen Gleichung an. Bestimmen Sie $f_p(x)$ explizit für $g(x) = \delta(x)$ und $K(x) = -\delta''(x)$. (Hierbei können Sie von dem Integral in Aufgabe 2 Gebrauch machen.) Wie lautet in diesem Spezialfall die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung?