Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

16. Februar 2008

Aufgabe 01

a) Ausgehend von der bekannten Gleichung

$$\dot{\rho}(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)$$

und dem Ohmschen Gesetz

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma\vec{E}(\vec{r},t)$$

schreiben wir

$$\dot{\rho} = -\operatorname{div}\vec{j} = -\operatorname{div}\sigma\vec{E} = -\sigma\cdot\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\rho$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ergibt sich als

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

und somit gilt

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cdot\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} = 0 \quad \square$$

b) Wir beginnen mit dem Poyntingschen Satz über die elektromagnetische und mechanische Energie $W_e,\ W_m$

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int\limits_{\partial U}\vec{S}\cdot d\vec{A}$$

wobei U das gesamte Universum sei. Das durch eine endliche Ladungsverteilung ρ induzierte $\vec{E}$-Feld sinkt mit der Ordnung $\frac{1}{r^2}$. Das gleiche gilt auch für das durch eine endliche Stromverteilung $\vec{j}$ induzierte $\vec{B}$-Feld. Somit sinkt der Betrag des Poynting-Vektors $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}$ mit $\frac{1}{r^4}$, weshalb die Integration über die Fläche im ∞ (Fläche steigt mit r^2) gegen 0 strebt. Somit erhalten wir die Energiebilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}W_e = -\frac{\partial}{\partial t}W_m$$

Die mechanische Leistung des Stromes ergibt sich als

$$P_m = \frac{\partial}{\partial t}W_m = \int_U \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}\ dV = \int_V \dot{\vec{r}}\cdot\left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right) = \int_V\left[\vec{j}\cdot\vec{E} + \underbrace{\dot{\vec{r}}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)}_{0}\right]\ dV = \frac{1}{\sigma}\cdot\int\limits_V \vec{j}\cdot\vec{j}\ dV$$

wobei V das betrachtete, endliche Volumen sei. Die elektromagnetische Energie im gesamten Raum ist allgemein gegeben durch

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_U\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right]\ dV$$

so dass man erhält:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_U \left[\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right]\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{U\setminus V}\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_U \frac{1}{2\mu_0}B^2\,dV$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2\sigma^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V j^2\,dV+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left\{\int\limits_{U\setminus V}\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV+\int\limits_U\frac{1}{2\mu_0}B^2\,dV\right\}}_{=:g(t)\geq 0}=-\frac{1}{\sigma}\int\limits_V j^2\,dV$$

Setzen wir

$$f(t):=\int\limits_V j^2\,dV$$

so bedeutet dies

$$\frac{\varepsilon_0}{2\sigma^2}\cdot\dot f+\dot g=-\frac{1}{\sigma}\cdot f\ ,\ \ f,g\geq 0$$

Wollen zeigen dass $f\to 0$ strebt:
Annahme:

$$\exists\ M>0: f(t)\geq M\ \forall\ t$$

Dann gilt:

$$0\leq\frac{\varepsilon_0}{2\sigma^2}\cdot f+g+C_0=\int\left[\frac{\varepsilon_0}{2\sigma^2}\cdot\dot f+\dot g\right]\,dt=-\frac{1}{\sigma}\int f\,dt\leq\frac{1}{\sigma}\int M\,dt=-\frac{M}{\sigma}\quad\to\quad-\infty$$

was ein Widerspruch ist. Somit muss gelten:

$$\forall\ t_0\ ,\ \forall\ M>0:\exists\ t>t_0: h(t):=\frac{\varepsilon_0}{2\sigma^2}\cdot f(t)+g(t)<M$$

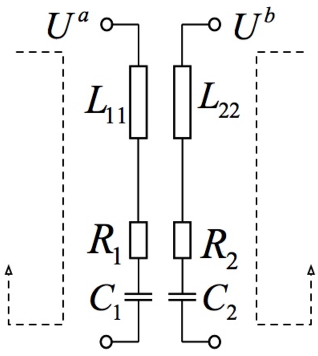
d.h 0 ist Häufungspunkt von $h(t)$. Da stets $\dot h\sim -f\leq 0$ ist, ist $h\geq 0$ monoton Fallend, und somit konvergent (da monoton, stetig & beschränkt). Demnach muss der Häufungspunkt gleich dem Grenzwert sein, also:

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=0\ \to\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\int_V j^2\,dV=0$$

Da $\vec{j}$ als stetig angenommen worden ist, muss auch $\vec{j}\to 0$ gehen. $\square$

Aufgabe 02

Wir nennen U_{iL}, U_{iR}, U_{iC} jeweils die Spannung an der Induktion L_i, dem Widerstand R_i und der Kapazität C_i des Schwingkreises $i=1,2$, entsprechend dem unten illustrierten Umlaufsinn.



Durch die Kirchhoffsche Maschenregel ergeben sich die Gleichungen

$$U_a + U_{1L} + U_{1R} + U_{1C} = 0$$

$$U_b + U_{2L} + U_{2R} + U_{2C} = 0$$

Durch das Induktionsgesetz weiß man dass

$$U_{1L} = -L_{11}\dot{I}_1 - L_{12}\dot{I}_2$$

$$U_{2L} = -L_{22}\dot{I}_2 - L_{12}\dot{I}_1$$

gilt. Ferner weiß man aus dem Ohmschen Gesetz dass

$$U_{iR} = -I_i R_i$$

gilt, wobei I_i jeweils der im Stromkreis fließende Strom ist. Die Potentialdifferenzen an den Kapazitäten ergeben sich einfach als

$$U_{iC} = -\frac{Q_i}{C_i}$$

so dass man die gekoppelten Differentialgleichungen

$$U_a - L_{11}\dot{I}_1 - L_{12}\dot{I}_2 - I_1 R_1 - \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

$$U_a - L_{22}\dot{I}_2 - L_{12}\dot{I}_1 - I_2 R_2 - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

erhält. Vernachlässigen wir die Widerstände R_i erhalten wir mit $I_i = \dot{Q}_i$ durch Differenzieren die Differentialgleichungen

$$L_{11}\ddot{I}_1 + L_{12}\ddot{I}_2 + \frac{I_1}{C_1} = 0$$

$$L_{22}\ddot{I}_2 + L_{12}\ddot{I}_1 + \frac{I_2}{C_2} = 0$$

Durch algebraische Manipulation erhält man

$$\ddot{I}_1\left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right) + \frac{I_1}{C_1} - \frac{L_{12}}{L_{22}C_2} \cdot I_2 = 0$$

$$\ddot{I}_2\left(L_{22} - \frac{L_{12}^2}{L_{11}}\right) + \frac{I_2}{C_2} - \frac{L_{12}}{L_{11}C_1} \cdot I_1 = 0$$

was genau einem System gekoppelter, harmonischer Oszillatoren entspricht:

$$\ddot{\vec{I}} = \begin{pmatrix} \ddot{I}_1 \\ \ddot{I}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \vec{I}$$

Wir identifizieren

$$a_1 = \frac{L_{22}}{C_1\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)} \qquad b_1 = \frac{L_{12}}{C_2\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)}$$

$$a_2 = \frac{L_{11}}{C_2\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)} \qquad b_2 = \frac{L_{12}}{C_1\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)}$$

Die allgemeine Lösung von $\vec{I}$ ergibt sich als

$$\vec{I} = C \cdot \vec{q}$$

wobei $\vec{q}$ die Lösungen enthält für die DGL

$$\ddot{q}_i = \lambda_i \cdot q_i$$

wobei λ_i der i-te Eigenwert von A und C die Spaltenmatrix der entsprechenden Eigenvektoren ist (siehe Mechanik). Die Eigenfrequenzen (Winkelfrequenzen) des Schwingers sind demnach genau $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$
Die Eigenwerte von A ergeben sich durch die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + a_1 & -b_1 \\ & \\ -b_2 & \lambda + a_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 - b_1 b_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \ \lambda_{12} = \frac{-(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4b_1 b_2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right) C_1 C_2} \cdot \left[-C_2 L_{22} - L_{11} C_1 \pm \sqrt{\left(L_{22}C_2 - L_{11}C_1\right)^2 + 4L_{12}^2 C_1 C_2}\right]$$

Man kann erkennen dass beide Eigenwerte reell sind. Im allgemeinen Fall ist jedoch nur der eine negativ. Damit beide Eigenwerte negativ sind (und somit die Eigenfrequenzen reell und nicht 0) muss gelten

$$\sqrt{\left(L_{22}C_2 - L_{11}C_1\right)^2 + 4L_{12}^2 C_1 C_2} = \sqrt{\left(L_{22}C_2 + L_{11}C_1\right)^2 + 4L_{12}^2 C_1 C_2 - 4L_{11}L_{22}C_1 C_2} \stackrel{!}{<} C_2 L_{22} + L_{11} C_1$$

$$\rightarrow \ L_{12}^2 \stackrel{!}{<} L_{11} L_{22}$$

Unter oberer Annahme ergeben sich die Eigenfrequenzen als

$$\boxed{\omega_{12} = \sqrt{\frac{1}{2\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right) C_1 C_2} \cdot \left[C_2 L_{22} + L_{11} C_1 \mp \sqrt{\left(L_{22}C_2 - L_{11}C_1\right)^2 + 4L_{12}^2 C_1 C_2}\right]}}$$

Bemerkung: Wäre $L_{12}^2 > L_{11}L_{22}$ so ergäbe sich ein positiver Eigenwert, was sich in einer Exponentialfunktion des $\vec{I}$ widerspiegeln würde!
Im Spezialfall $L_{11} = L_{22} =: L$ und $C_1 = C_2 =: C$ ergäben sich nach obiger Formel die Eigenfrequenzen als

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C\left(L + L_{12}\right)}} \ , \ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C\left(L - L_{12}\right)}}$$

Ist ferner $L_{12} = 0$ so sind die beiden Schwingkreise vollständig entkoppelt und haben nur noch eine Eigenfrequenz, nämlich genau die eines einzelnen Schwingkreises:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Aufgabe 03

Der Draht $D \subset \mathbb{R}^3$ habe den Radius R und sei entland der z-Achse gerichtet:

$$D := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

Der Strom sei unabhängig von seiner Verteilung im Inneren gegeben durch

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Aufgrund von Symmetriegründen sind die Stromverteilung im Inneren und somit auch die Felder im Inneren und Äußeren unabhängig von der z-Achse. Wählen also Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Außerdem müssen die Ströme (und somit das $\vec{E}$-Feld im Inneren) aufgrund von Symmetriegründen überall entlang der z-Achse gerichtet sein. Wir führen die Potentialfelder ein:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \ , \ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

und sehen dass Φ ferner nicht von φ abhängen kann, also eine reine Funktion des Abstandes r von der z-Achse ist. Durch die Lorenz-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0$$

ergeben sich die (inhomogenen) entkoppelten Wellengleichungen

$$\Box\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \ , \ \Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \ , \ \Box := \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind allgemein gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_l\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV' \ \parallel \ \vec{e}_z$$

wobei ρ_l die Ladungsdichte und $\vec{j}$ die Stromdichte seien. Im Inneren des Leiters gilt

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \ \rightarrow \ \rho = 0$$

so dass automatisch $\varphi = 0$ ist. Aufgrund von Symmetriegründen ist $\vec{A} = A\vec{e}_z$ unabhängig von φ so dass gilt

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A(r, t)\cdot\vec{e}_z \ \rightarrow \ \vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(r, t) = -\frac{\partial A(\vec{r}, t)}{\partial r}\cdot\vec{e}_\varphi = B(r, t)\cdot\vec{e}_\varphi$$

und ferner

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(r, t) = -\frac{\partial A(r, t)}{\partial t}\cdot\vec{e}_z = E(r, t)\cdot\vec{e}_z$$

Annahme: Es handelt sich um einen niederfrequenten Wechselstrom, d.h die Felder ändern sich genügend langsam um in Näherung zu schreiben

$$\operatorname{rot}\vec{B} \approx \mu_0\vec{j} \ , \ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Somit gilt für eine beliebige, auf den Leiter senkrecht stehende Kreisfläche K, mit dem Radius $r \geq R$ um die Symmetrieachse:

$$2\pi r B(\vec{r}, t) = \int_{\partial K}\vec{B}(\vec{s}, t)\ d\vec{s} = \int_K \mu_0\vec{j}\ d\vec{A} = I_0\cos(\omega t)$$

und somit für das $\vec{B}$-Feld

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0\cos(\omega t)}{2\pi r}\cdot\vec{e}_\varphi}$$

Ferner folgt

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial r}\cdot\vec{e}_\varphi \overset{!}{=} -\dot{\vec{B}} = \frac{\omega\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin(\omega t)\cdot\vec{e}_\varphi \ \rightarrow \ E(\vec{r}, t) = E(R, t) + \frac{\omega\mu_0 I_0}{2\pi}\sin(\omega t)\cdot\ln\left|\frac{R}{r}\right|\cdot\vec{e}_z$$

Ist

$$E(R, t) = E_0\cos(\omega t)$$

das elektrische Feld am Rand des Leiters, so ergibt sich das Feld im Äußeren als

$$\boxed{E(\vec{r},t) = \left[E_0 \cos(\omega t) + \frac{\omega \mu_0 I_0}{2\pi} \sin(\omega t) \cdot \ln\left|\frac{R}{r}\right|\right] \cdot \vec{e}_z}$$

Aufgabe 04

Das vollständige System der MWG im Vakuum ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r},t) \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$$

a) Verwenden die 1. und 4. Gleichung, schreiben

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

und erhalten die Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) + \dot{\rho}(\vec{r},t) = 0$$

b) Die Anfangswerte

$$\vec{E}(\vec{r},0) \ , \ \vec{B}(\vec{r},0)$$

stellen genau 6 Gleichungen dar bzw. entsprechen genau 6 skalaren Funktionen. Durch die Gleichung

$$\rho(\vec{r},0) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},0)$$

ist der Anfangswert $\rho(\vec{r},0)$ automatisch festgelegt. Wegen den 3 Gleichungen

$$\dot{\vec{B}}(\vec{r},0) = -\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},0)$$

gilt analoges für $\dot{\vec{B}}(\vec{r},0)$. Die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ liefert liefert hingegen keine weitere Aussage über den Zustand des Systems, und man erhält schließlich die Bedingung

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{r},0) + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}(\vec{r},0) = \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},0)$$

in Form von 3 Gleichungen, wobei jetzt entweder $\dot{\vec{E}}$ oder $\vec{j}$ *frei wählbar* ist bzw. vorgegeben werden muss um das Problem eindeutig zu lösen (3 unbekannte Funktionen). Dies ist in Übereinstimmung mit der Tatsache dass man aus insgesamt 13 Gleichungen am Ende die 16 in den MWG auftauchenden Funktionen bestimmen will, nämlich

$$\vec{E}(\vec{r},t) \ , \ \vec{B}(\vec{r},t) \ , \ \dot{\vec{E}}(\vec{r},t) \ , \ \dot{\vec{B}}(\vec{r},t) \ , \ \rho(\vec{r},t) \ , \ \vec{j}(\vec{r},t)$$

Durch die Vorgabe von $\vec{E}(\vec{r},0)$ und $\vec{B}(\vec{r},0)$ muss die Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

erfüllt sein!