Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

4. Februar 2008

Aufgabe 01

Wir beginnen mit

$$\vec{k} = \partial_j T_{ij} \vec{e}_i$$

und schreiben

$$\vec{k} = \partial_j (E_i D_j) \vec{e}_i + \partial_j (H_i B_j) \vec{e}_i - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_j \left(E_k D_k + H_k B_k \right) \vec{e}_i$$

$$= E_i \partial_j D_j \vec{e}_i + D_j \partial_j E_i \vec{e}_i + H_i \partial_j B_j \vec{e}_i + B_j \partial_j H_i \vec{e}_i - \frac{1}{2} \partial_i \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \vec{e}_i$$

$$= \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{\rho} \cdot \vec{E} + \left(\vec{D} \operatorname{grad} \right) \vec{E} + \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{0} \cdot \vec{H} + \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{H} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right)$$

$$= \rho \vec{E} + \left(\vec{D} \operatorname{grad} \right) \vec{E} + \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{H}$$

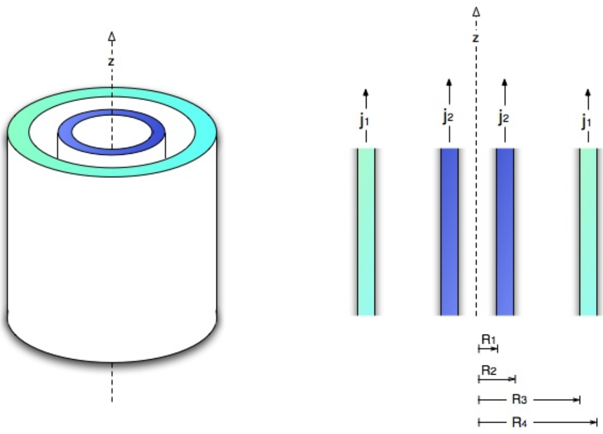
$$- \frac{1}{2} \left[\left(\vec{E} \operatorname{grad} \right) \vec{D} + \left(\vec{D} \operatorname{grad} \right) \vec{E} + \vec{D} \times \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{0} + \vec{E} \times \underbrace{\operatorname{rot} \vec{D}}_{0} + \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{H} + \left(\vec{H} \operatorname{grad} \right) \vec{B} + \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} \right]$$

$$= \rho \vec{E} + \underbrace{\left(\vec{D} \operatorname{grad} \right) \vec{E} - \left(\vec{D} \operatorname{grad} \right) \vec{E}}_{0} + \underbrace{\left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{H} - \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{H}}_{0} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} = \rho \vec{E} + \underbrace{\left(\operatorname{rot} \vec{H} \right)}_{\vec{j}} \times \vec{B}$$

$$= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad \square$$

Aufgabe 02

In Hinsicht auf die Zylindersymmetrie der Anordnung, verwenden wir Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Wir setzen die z-Achse o.B.d.A in die Symmetrieachse der Anordnung gemäß



und erkennen dass das Magnetfeld aufgrund von Symmetriegründen zum einen nicht von der z Koordinate abhängen und zum anderen nur senkrecht zu $\vec{e}_z$ zeigen kann. Ferner folgt aus der selben Tatsache, dass die radiale Komponente $B_\rho := \vec{B} \cdot \vec{e}_\rho$ nicht von φ abhängen kann und somit auch Zylindersymmetrisch ist. Das gleiche mus auch für die azimutale Komponente $B_\varphi := \vec{B} \cdot \vec{e}_\varphi$ gelten.
Da wir von stationären Zuständen ausgehen, gilt unter Anderem für das Magnetfeld $\vec{B}$ und die Stromdichte $\vec{j}$ die Beziehung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Wir betrachten das Magnetfeld an einem beliebigen Punkt $\vec{r}$ wobei o.B.d.A $z = 0$ sei. Für den Kreis

$$K_r := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, \ z = 0 \right\}$$

gilt

$$\mu_0 I_r = \mu_0 \cdot \int\limits_{K_r} \vec{j} \ d\vec{A} = \int\limits_{K_r} \operatorname{rot} \vec{B} \ d\vec{A} = \int\limits_{\partial K_r} \vec{B} \cdot \ d\vec{s} = \int\limits_{\partial K_r} B_\varphi \ ds = B_\varphi \int\limits_{\partial K_r} ds = 2\pi r B_\varphi$$

wobei I_r der gesamte durch den Kreis K_r (von *unten* nach *oben*) fließende Strom sei. Da allgemein $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ist, können wir mit Hilfe des *Gaußschen Satzes in der Ebene* schreiben

$$0 = \int\limits_{K_r} \operatorname{div} \vec{B} \ dA = \int\limits_{\partial K_r} \vec{B} \cdot \vec{n} \ ds = \int\limits_{\partial K_r} B_\rho \ ds = B_\rho \int\limits_{\partial K_r} ds = 2\pi r B_\rho \ \rightarrow \ B_\rho = 0$$

Somit ist das $\vec{B}$ Feld senkrecht zu $\vec{e}_\rho$ und gegeben durch

$$\vec{B} = B_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

Speziell für die Stromdichten $\vec{j}_i = j_i \cdot \vec{e}_z$ gilt

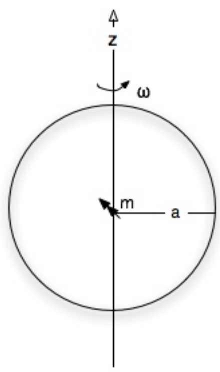
$$I_r = \int\limits_{K_r} \vec{j}(\vec{r}) \ d\vec{A} = \int\limits_{K_r} j(\vec{r}) \ dA = \begin{cases} 0 & : r \leq R_1 \\ j_1 \pi \left(r^2 - R_1^2 \right) & : r \in [R_1, R_2] \\ j_1 \pi \left(R_2^2 - R_1^2 \right) & : r \in [R_2, R_3] \\ j_1 \pi \left(R_2^2 - R_1^2 \right) + j_2 \pi \left(r^2 - R_3^2 \right) & : r \in [R_3, R_4] \\ j_1 \pi \left(R_2^2 - R_1^2 \right) + j_2 \pi \left(R_4^2 - R_3^2 \right) & : r \geq R_4 \end{cases}$$

und somit für das Magnetfeld

$$\vec{B} = \int_{K_r} \vec{j}(\vec{r})\ d\vec{A} = \int_{K_r} j(\vec{r})\ dA = \begin{cases} 0 & : r \leq R_1 \\ \frac{\mu_0 j_1}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) \cdot \vec{e}_\varphi & : r \in [R_1, R_2] \\ \frac{\mu_0 j_1}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \vec{e}_\varphi & : r \in [R_2, R_3] \\ \frac{\mu_0 j_1}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\mu_0 j_2}{2}\left(r - \frac{R_3^2}{r}\right) \cdot \vec{e}_\varphi & : r \in [R_3, R_4] \\ \frac{\mu_0 j_1}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\mu_0 j_2}{2r}\left(R_4^2 - R_3^2\right) \cdot \vec{e}_\varphi & : r \geq R_4 \end{cases}$$

Aufgabe 03

Wir setzen o.B.d.A $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ und den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Schleife.



a) Die durch die Drehung im stationären, vom Dipol $\vec{m}$ erzeugten, Magnetfeld $\vec{B}_m$, erzeugte Ringspannung $U_m(t)$ ist allgemein gegeben durch

$$U_m(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}_m\ d\vec{A}$$

wobei S eine beliebige Fläche mit der Ringschleife ∂S als Rand ist. Wir setzen hier S als die von ∂S umgebene Kreisfläche mit dem Radius R und nennen $\vec{n}_s$ den auf der Fläche senkrecht stehenden Einheitsvektor. Wir führen das Vektorpotential $\vec{A}$ ein:

$$\vec{B}_m = \text{rot}\, \vec{A}$$

für das in unserem Spezialfall gilt

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Somit können wir schreiben

$$U_m(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \text{rot}\, \vec{A}\ d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} \vec{A}\ d\vec{s} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}\ d\vec{s} = -\frac{\mu_0}{4\pi a^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} (\vec{m} \times \vec{r})\ d\vec{s}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi a^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} \vec{m} \cdot (\vec{r} \times d\vec{s}) = -\frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi a^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{s} = -\frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi a^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S} a \cdot \vec{n}\ ds = -\frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi a^2} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \cdot \int_{\partial S} ds$$

$$= -\frac{\mu_0}{2a} \cdot \vec{m} \cdot \dot{\vec{n}}$$

Der Vektor $\vec{n}$ sei o.B.d.A (freie Wahl der Anfangsrichtung) gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{n}(t) = \vec{e}_\rho = \cos\omega t \cdot \vec{e}_x + \sin\omega t \cdot \vec{e}_y$$

Somit ergibt sich

$$\dot{\vec{n}} = -\omega \sin\omega t \cdot \vec{e}_x + \omega \cos\omega t \cdot \vec{e}_y$$

und dementsprechend für die Spannung

$$\boxed{U_m(t) = \frac{\mu_0 \omega}{2a} \cdot (m_x \sin\omega t - m_y \cos\omega t)}$$

Speziell folgt für den Fall $\vec{m} \parallel \omega$, d.h $\vec{m} = m_z \vec{e}_z$:

$$U_m(t) \equiv 0$$

Steht andernfalls $\vec{m}$ zur Zeit t senkrecht auf der Leiterschleife, d.h $\vec{m} \parallel \vec{n}(t=0) = \vec{e}_x$ bzw. $\vec{m} = m_x \vec{e}_x$, so folgt

$$U_m(t) = \frac{\mu_0 \omega m_x}{2a} \cdot \sin\omega t$$

b) Wir beachten jetzt auch die Selbstinduktivität L des Leiters, die ihrerseits durch den erzeugten Strom I das $\vec{E}$-Feld im Leiter beeinflusst. Es gilt jetzt für die im Leiter herrschende Ringspannung

$$U(t) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}_m \; d\vec{A}}_{U(t)} - \frac{\partial}{\partial t} LI = U_m(t) - \frac{L}{R}\dot{U} = \frac{\mu_0 \omega}{2a} \cdot (m_x \sin\omega t - m_y \cos\omega t) - \frac{L}{R}\dot{U}$$

Obere Beziehung stellt eine lineare, inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung dar, deren allgemeine Lösung sich ergibt als

$$U(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R\mu_0\omega}{2a(R^2 + L^2\omega^2)} \left[(Rm_x - L\omega m_y) \cdot \sin\omega t - (Rm_y + L\omega m_x) \cdot \cos\omega t\right] \;, \; A \in \mathbb{R}$$

Fordern wir *Quasistationarität*, so ergibt sich notwendigerweise $A = 0$ und somit die (periodische) Ringspannung

$$\boxed{U(t) = \frac{R\mu_0\omega}{2a(R^2 + L^2\omega^2)} \left[(Rm_x - L\omega m_y) \cdot \sin\omega t - (Rm_y + L\omega m_x) \cdot \cos\omega t\right]}$$

bzw. Stromfluss

$$\boxed{I(t) = \frac{\mu_0\omega}{2a(R^2 + L^2\omega^2)} \left[(Rm_x - L\omega m_y) \cdot \sin\omega t - (Rm_y + L\omega m_x) \cdot \cos\omega t\right]}$$