Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

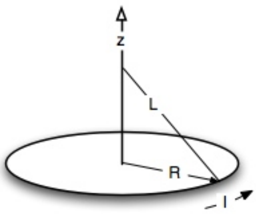
29. Januar 2008

Aufgabe 01

Wir betrachten den im Kreis

$$\mathcal{K} := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0 \right\}$$

fliesenden Kreisstrom I



und untersuchen das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ auf einem beliebigen Punkt $\vec{r}$ auf der z-Achse, unter Verwendung des Biot-Savartschen Gesetzes

$$d\vec{B}(\vec{r}) = K \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}\ dV = KI \cdot \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}, \quad K := \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Dabei läuft $\vec{s}$ in Richtung des Stromflusses um den Kreis $\mathcal{K}$ herum, und es gilt $|\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{z^2 + R^2}$. Ferner gilt in Zylinderkoordinaten

$$d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s}) = R\left(\cos\varphi \cdot \vec{e}_y - \sin\varphi \cdot \vec{e}_x\right) \times \left(z \cdot \vec{e}_z - R\cos\varphi \cdot \vec{e}_x - R\sin\varphi \cdot \vec{e}_y\right)\ d\varphi = Rz\left(\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + \sin\varphi \cdot \vec{e}_y\right)\ d\varphi + R^2 d\varphi \cdot \vec{e}_z$$

Somit können wir schreiben

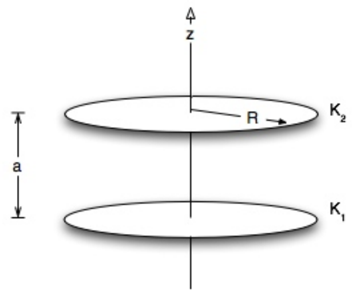
$$\vec{B}(\vec{r}) = KI \cdot \int_{\mathcal{K}} \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{KIR}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} z\left(\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + \sin\varphi \cdot \vec{e}_y\right)\ d\varphi}_{0} + \int_0^{2\pi} R\ d\varphi \cdot \vec{e}_z \right\}$$

$$= \frac{2\pi KIR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 02

Der Induktionskoeffizient L_{ik} der beiden Kreise

$$K_i := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2,\ z = z_i\right\}$$



ist gegeben durch

$$L_{ik} = K \cdot \int\limits_{K_1}\int\limits_{K_2} \frac{d\vec{s}_1\ d\vec{s}_2}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|},\ K := \frac{\mu_0}{4\pi}$$

wobei wir die später anzugebenden Ströme I_i immer bzgl. der Drehrichtung von $\vec{s}_i$ deuten.
Wir verwenden Zylinderkoordinaten und schreiben

$$L_{ik} = KR^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_{\varphi_1} \cdot \vec{e}_{\varphi_2}}{\sqrt{R^2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2 + R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2 + a^2}}\ d\varphi_1\ d\varphi_2$$

$$= KR^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{2R^2(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + a^2}}\ d\varphi_1 = KR^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{2R^2(1 - \cos\varphi_1) + a^2}}\ d\varphi_1$$

$$= 2\pi KR^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2R^2(1 - \cos\varphi) + a^2}}\ d\varphi$$

a) Wir schreiben den Induktionskoeffizienten als

$$L_{ik} = 2\pi KR^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2R^2(1 - \cos\varphi) + a^2}}\ d\varphi$$

Die im aufgebauten Magnetfeld gespeicherte Energie ist gegeben durch

$$W(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k = L_{12}(a) I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} l_2^2$$

Somit ergibt sich die auf einen Kreis wirkende Kraft als

$$\vec{F}_1 = -\operatorname{grad} W = \frac{\partial W}{\partial a} \cdot \vec{e}_z = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial a} \cdot \vec{e}_z = 2\pi KR^2 I_1 I_2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2R^2(1 - \cos\varphi) + a^2}}\ d\varphi$$

$$= -2\pi KR^2 a I_1 I_2 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{[2R^2(1 - \cos\varphi) + a^2]^{3/2}}\ d\varphi}_{>0}$$

Die Spulen werden auseinander geschoben!

b) Für sehr große Abstände $|a| >> R$ können wir näherungsweise schreiben

$$L_{ik} = \frac{2\pi K R^2}{a} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\frac{2R^2}{a^2}(1-\cos\varphi)+1}}\, d\varphi \overset{*}{\approx} \frac{2\pi K R^2}{a} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \left[1 - \frac{R^2}{a^2}(1-\cos\varphi)\right]\, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi^2 K R^4}{a^3} = \frac{\mu_0 \pi R^4}{2a^3}$$

(*) : Taylorentwicklung bis zum 2. Glied.
Die auf den unteren Kreis wirkende Kraft $\vec{F}_1$ ist analog zu vorhin gegeben durch

$$\vec{F}_1 = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial a} \cdot \vec{e}_z = -I_1 I_2 \frac{3\pi\mu_0 R^4}{2a^4} \cdot \vec{e}_z$$

und deutet darauf hin, dass die Kreise von einander Weggeschoben werden!

Variante: Allgemein gilt für den magnetischen Fluss

$$\Phi_i = \int_{K_i} \vec{B}(\vec{r})\, d\vec{A}$$

durch den Kreis

$$B_i := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le R^2,\ z = z_i\right\}$$

die Identität

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$$

Betrachten wir nur den Fluss Φ_{ik} des durch den Strom I_k erzeugten Feldes durch den Kreis K_i, so können wir sagen

$$\Phi_{ik} = L_{ik} I_k$$

Kennen wir also Φ_{ik} so können wir gleich L_{ik} aufschreiben. Für sehr große Abstände $|a| >> R$ können wir für das durch I_1 erzeugte $\vec{B}$-Feld in der Nähe des zweiten Kreises annähernd schreiben

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z$$

wobei I_1 als Positiv gilt falls der Strom von unten gesehen eine Rechtsdrehung durchläuft.
Somit ergibt sich der Fluss durch K_2 als

$$\Phi_{21} \approx \pi R^2 \cdot B = \frac{\mu_0 \pi I_1 R^4}{2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und ferner der Induktionskoeffizient

$$L_{ik} \approx \frac{\mu_0 \pi R^4}{2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_0 \pi R^4}{2a^3}$$

Somit können wir einen etwas *genaueren* Wert für die Kraft berechnen, gemäß

$$\vec{F}_1 = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial a} \cdot \vec{e}_z = -I_1 I_2 \frac{3\pi\mu_0 R^4 a}{2(a^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 03

Wir beginnen mit der Poissongleichung für das magnetische Potential φ_m

$$\Delta\varphi = \frac{\operatorname{div}\vec{M}}{\mu_0}$$

und erinnern uns an die Analogie zur Elektrostatik wo wir bei Ladungsfreien Problemen aus

$$\Delta\varphi_e = \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

bekamen

$$\varphi_e(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_V \frac{\operatorname{div}_{\vec{r}\,'}\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{\partial V}\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\,d\vec{A}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

So schreiben wir hier in exakter Analogie

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\int_V \underbrace{\frac{\operatorname{div}_{\vec{r}\,'}\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{0}\,dV' + \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\int_{\partial V}\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\,d\vec{A}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\int_V \operatorname{div}_{\vec{r}\,'}\left\{\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}\,dV' = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\int_V\left\{\underbrace{\frac{\operatorname{div}_{\vec{r}\,'}\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{0} + \vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\operatorname{grad}_{\vec{r}\,'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}\,dV'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\int_V \vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\operatorname{grad}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \overset{M:const}{=} -\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\cdot\vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\operatorname{grad}_{\vec{r}}\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'}_{U_k(\vec{r})}$$

Der Ausdruck $U_k(\vec{r})$ stellt genau das elektrostatische Potential einer mit der Ladungsdichte $\rho = 1$ geladenen Kugel dar:

$$U_k(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0 r} & : r \geq R \\[2ex] \dfrac{3R^2 - r^2}{6\varepsilon_0} & : r < R \end{cases}$$

Somit kann man schreiben

$$\varphi_m(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{R^3}{3\mu_0}\dfrac{\vec{M}\cdot\vec{r}}{r^3} & : r \geq R \\[2ex] \dfrac{1}{3\mu_0}\vec{M}\cdot\vec{r} & : r < R \end{cases}$$

Durch Bildung von $\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_m$ bekommt man für das innere $\vec{H}$-Feld

$$\vec{H} = -\frac{1}{3\mu_0}\operatorname{grad}\left\{\vec{M}\cdot\vec{r}\right\} = -\frac{1}{3\mu_0}\left[(\vec{r}\operatorname{grad})\,\vec{M} + \left(\vec{M}\operatorname{grad}\right)\vec{r}\right] = -\frac{1}{3\mu_0}\vec{M}$$

und sieht dass dies genau entgegen gerichtet zum Magnetisierungseld ist. Das äußere Feld ist äquivalent zu einem Dipolfeld.