Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

21. Januar 2008

Aufgabe 01

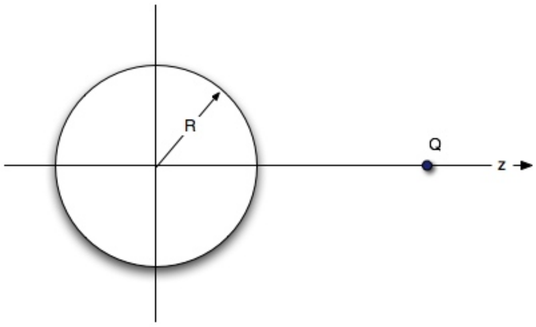
Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ist außerhalb der Kugel

$$B := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{r}| \leq R\right\}$$

identisch mit einem Feld das von der Ladung Q und der entsprechenden Spiegelladung innerhalb der Kugel erzeugt wäre, und somit gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{KQ(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{fKQ\left(\vec{r}-f^2\vec{a}\right)}{|\vec{r}-f^2\vec{a}|^3}, \quad K := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \ f := \frac{R}{|\vec{a}|}$$

wobei $\vec{a}$ der Ortsvektor zur Punktladung Q sei. Im Inneren der Kugel ist $\vec{E} = 0$. Wir setzen o.B.d.A $\vec{a} = a\vec{e}_z = (R+l)\vec{e}_z$, und sehen so dass aufgrund von Symmetriegründen die auf die Kugel ausgeübte Kraft nur in z-Richtung zeigen kann.



Bemerkung: Sie ist bis auf das Vorzeichen identisch der auf die Punktladung ausgeübten Kraft $\vec{F}_p$ (Reaktionsprinzip)

$$\vec{F}_p = -\frac{fKQ^2}{|\vec{a}-f^2\vec{a}|^2} \cdot \vec{e}_z = -\frac{kRQ^2}{a(a^2-R^2)} \cdot \vec{e}_z$$

Doch wir wollen sie mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors M ausrechnen, dessen entsprechende Matrix bzgl. der Standardbasis gegeben ist als

$$M = \begin{pmatrix} E_xD_x - w & E_xD_y & E_xD_z \\ E_yD_x & E_yD_y - w & E_yD_z \\ E_zD_x & E_zD_y & E_zD_z - w \end{pmatrix}, \quad w := \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

wobei w die Energiedichte und $\vec{D}$ das Verschiebungsfeld seien.
Bemerkung: Es gilt in unserem Fall $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$.
Die Kraft auf ein beliebiges Volumen V ist gegeben durch

$$\vec{F}_V = \int_V \operatorname{div} M \ dV = \int_{\partial V} M \cdot d\vec{A}$$

Wir untersuchen ein Volumen V das die Kugel B enthält ($B \subset V$) jedoch aber nicht die Punktladung! Wir wissen schon dass $\vec{F}$ dann nur eine z-Komponente hat, und kümmern uns deshalb nur um die letzte Zeile der Matrix M, also:

$$\vec{F} = F_z \cdot \vec{e}_z = \left[\int_V \underbrace{\begin{pmatrix} E_z D_x \\ E_z D_y \\ E_z D_z - w \end{pmatrix}}_{\vec{m}} \cdot d\vec{A} \right] \cdot \vec{e}_z$$

Berechnung von $\vec{m}$: Wir beginnen mit dem bekannten $\vec{E}$-Feld und schreiben

$$w = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon_0 K^2 Q^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|^4} + \frac{1}{|\vec{r} - f^2\vec{a}|^4} + 2\frac{\left(-fr^2 + f^3\vec{r} \cdot \vec{a} + f\vec{r} \cdot \vec{a} - f^3a^2\right)}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 K^2 Q^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|^4} + \frac{1}{|\vec{r} - f^2\vec{a}|^4} + 2f\frac{\left((za - r^2) + f^2(za - a^2)\right)}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \right]$$

$$E_z D_z = \varepsilon_0 K^2 Q^2 \cdot \left[\frac{z^2 + a^2 - 2za}{|\vec{r} - \vec{a}|^6} + \frac{f^2 z^2 + f^6 a^2 - 2zf^3 a}{|\vec{r} - f^2\vec{a}|^6} + 2f\frac{\left(f^2(za - a^2) + za - z^2\right)}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \right]$$

$$E_z D_x = \varepsilon_0 K^2 Q^2 \cdot \left[\frac{(z-a)x}{|\vec{r} - \vec{a}|^6} + \frac{f^2\left(z - f^2 a\right)x}{|\vec{r} - f^2\vec{a}|^6} + \frac{fx\left(a + f^2 a - 2z\right)}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \right]$$

$$E_z D_y = \varepsilon_0 K^2 Q^2 \cdot \left[\frac{(z-a)y}{|\vec{r} - \vec{a}|^6} + \frac{f^2\left(z - f^2 a\right)y}{|\vec{r} - f^2\vec{a}|^6} + \frac{fy\left(a + f^2 a - 2z\right)}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \right]$$

$$|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}, \quad |\vec{r} - f^2\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - f^2 a\right)^2}$$

Jede Eck-Klammer enthält 3 Terme, die wir T_1, T_2 und T_3 von links nach rechts nennen. Der Term T_1 resultiert allein aus der Punktladung Q, Term T_2 allein aus der Ladungsverteilung auf der Kugel (bzw. der entsprechenden Spiegelladung) und T_3 aus der *Wechselwirkung* der beiden Ladungsverteilungen. Aufgrund der Linearität der ganzen Sache, können wir den Vektor $\vec{m}$ bzw. die Tensormatrix M in diese 3 Terme aufspalten. Dann würde die Integration über den 1en bzw. 2en Term genau die Kraft auf einer **jeweils alleinstehenden** Ladung ergeben. Diese ist genau 0. Somit müssen wir nur den Mischterm T_3 betrachten, und erhalten so den *effektiven* Wert für $\vec{m}$:

$$\vec{m}_e = \frac{\varepsilon_0 f K^2 Q^2}{|\vec{r} - \vec{a}|^3 \, |\vec{r} - f^2\vec{a}|^3} \cdot \begin{pmatrix} x(a + f^2 a - 2z) \\ y(a + f^2 a - 2z) \\ f^2(za - a^2) + za + x^2 + y^2 - z^2 \end{pmatrix} \;,\; F_z = \int_{\partial V} \vec{m}_e \cdot d\vec{A}$$

Nun müssen wir ein geeignetes Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ suchen, das die Integration über seine Oberfläche erleichtert. Dazu betrachten wir zunächst den Kasten

$$V_t := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x \in [-t, t],\ y \in [-t, t],\ z \in [-t, z_0] \right\} \supset B$$

wobei z_0 noch geeignet zu wählen wäre. Alle Terme in $\vec{m}$ gehen bei $t \to \infty$ mit Ordnung $\frac{1}{t^4}$ gegen 0, so dass auch die Integration über alle Flächenteile außer

$$S_0 := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : z = z_0 \right\}$$

mit der Ordnung $\frac{1}{t^2}$ gegen 0 strebt. Somit müssen wir nur noch die Integtation über S_0 betrachten. Um uns das Leben noch einfacher zu machen, wählen wir $z_0 \in (R, a)$ so, dass

$$|\vec{r} - \vec{a}| \,|_{z=z_0} = \left|\vec{r} - f^2\vec{a}\right| \,|_{z=z_0}$$

ist, und bekommen

$$z_0 = \frac{a}{2}(f^2+1)$$

Durch einfaches Vergleichen sieht man dass tatsächlich $z_0 \in (R, a)$ ist!
Integration: Wir definieren für $z = z_0$

$$\rho^2 := x^2 + y^2$$

und legen los:

$$F_z = \int_{S_0} \vec{m}_e \cdot \vec{e}_z \; dA = \underbrace{\varepsilon_0 f K^2 Q^2}_{\Omega} \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\left[f^2(z_0 a - a^2) + z_0(a-z_0)\right] + \rho^2}{\left(\rho^2 + (z_0-a)^2\right)^3} \; \rho \; d\varphi \; d\rho$$

$$= 2\pi\Omega \cdot \int_0^\infty \frac{\left[f^2(z_0 a - a^2) + z_0 a - z_0^2\right]\rho + \rho^3}{\left[\rho^2 + (z_0-a)^2\right]^3} \; d\rho = 2\pi\Omega \cdot \left[-\frac{\left[(a-z_0)^2 + 2\rho^2 + f^2(z_0 a - a^2) + z_0(a-z_0)\right]}{4\left[\rho^2 + (z_0-a)^2\right]^3} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi a \Omega (1-f^2)}{2(a-z_0)^3} = \frac{RKQ^2}{a(a^2-R^2)} = \frac{RKQ^2}{l(R+l)(2R+l)}$$

Somit ergibt sich die Kraft auf die Kugel als

$$\boxed{\vec{F} = \frac{RKQ^2}{l(R+l)(2R+l)} \cdot \vec{e}_z}$$

Fazit: Beide Vorgehensweisen ergeben die gleiche Kraft. Welche man wählt, ist einem selbst überlassen.

Aufgabe 02

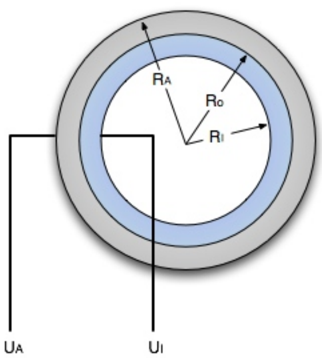
Nennen: Wir nennen um: $U_i \to U_i^o$ das Potential an der Grenfläche $r = R_i$.
Wir nennen die Flächen

$$K_i := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{r}| = R_i \right\}, \; i \in \{I, A, O\}$$

Da K_I und K_A Äquipotentialflächen sind, muss das $\vec{E}$-Feld senkrecht auf diese stehen. Ferner folgt aus der Symmetrie der Randwerte dass der Betrag des Feldes nur abhängig vom Abstand $r = |\vec{r}|$ vom Zentrum sein darf, und allgemein radial nach außen bzw. nach innen zeigt! Demnach ist auch die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r})$$

Kugelsymmetrisch. Analog sind auch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das Potential U Kugelsymetrisch!



Wir beginnen mit $\dot{\rho} = 0$ und schreiben

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E} = -\sigma \operatorname{grad} U(\vec{r}) = -\sigma \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_\rho$$

$$0 = \dot{\rho} = \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = -\sigma \Delta U \;\; \to \;\; \Delta U = 0 \;\; \to \;\; \rho = -\varepsilon_0 \varepsilon \Delta U = 0$$

Die netto Ladungsdichte **innerhalb einer Teil-Schale** ist also 0! Ferner ergibt sich die allgemeine Lösung für U in jeweils jeder Teilschale i als

$$U_i(r) = \frac{B_i}{r} + C_i,\ \ B_i, C_i \in \mathbb{R}$$

Wir wollen nun B_i, C_i bestimmen! Aufgrund der Stetigkeit an der Grenzfläche K_o

$$U_I(R_o) \stackrel{!}{=} U_A(R_0)$$

folgt

$$B_I - B_A = R_o \cdot (C_A - C_I)$$

Durch die Randbedingungen

$$U_I(R_I) = U_I^o\ ,\ U_A(R_A) = U_A^o$$

folgt

$$\frac{B_I}{R_I} + C_I = U_I^o\ \ ,\ \ \frac{B_A}{R_A} + C_A = U_A^o$$

Zusammengefasst also

$$B_I\left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_I}\right) + B_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_o}\right) = U_A^o - U_I^o$$

Wir haben noch einen Freiheitsgrad, der die *noch freie* Wahl des Potentials U_g widerspiegelt! Jedoch muss noch die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden! Die Normalkomponente $\vec{j} \cdot \vec{e}_\rho = j$ des Stromes $\vec{j}$ muss an der Grenfläche K_o stetig sein. Somit folgt

$$-\sigma_1 \operatorname{grad} U_1(R_o) = \sigma_1 \vec{E}_1(R_o) = \vec{j}(R_o) = \sigma_2 \vec{E}_2(R_o) = -\sigma_2 \operatorname{grad} U_2(R_o) \ \rightarrow\ \sigma_1 B_1 = \sigma_2 B_2$$

$$\rightarrow\ B_1 = \sigma_2(U_A - U_I) \cdot \left[\frac{\sigma_1}{R_A} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{R_o} - \frac{\sigma_2}{R_I}\right]^{-1}\ ,\ B_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} B_1$$

Aus

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \operatorname{grad} U$$

ergibt sich jetzt der Strom in der gesamten Schale als:

$$\boxed{\vec{j} = (U_A - U_I) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{r^2} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{R_A} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{R_o} - \frac{\sigma_2}{R_I}\right]^{-1} \cdot \vec{e}_\rho}$$

Um den Strom an der Grenfläche trotz unterschiedlicher Leitfähigkeiten stetig zu halten, muss sich eine Oberflächenladungsdichte bilden. Allgemein gilt für homogene Medien

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \vec{j}$$

An einer Grenzfläche $\mathcal{F}$ zwischen Materialien ε_1, σ_1 und ε_2, σ_2 gilt somit allgemein wegen der Stetigkeit der Normalenkomponente j_n von $\vec{j}$

$$\eta_{ext} = \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)_n = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) j_n$$

Bemerke: Sind $\varepsilon_1 = \varepsilon_2,\ \sigma_1 = \sigma_2$, so verschwindet die Oberflächenladungsverteilung.
Es ergibt sich also eine Oberflächenladungsdichte an der Grenzfläche gemäß

$$\boxed{\eta_o = \varepsilon_0(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2) \cdot \frac{(U_A - U_I)}{R_o^2} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{R_A} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{R_o} - \frac{\sigma_2}{R_I}\right]^{-1}}$$

Im Rest der Schale ist $\rho(\vec{r}) = 0$.

Aufgabe 03

Annahme: Wir nehmen an, dass für eine Kugelsymmetrische, rotierende Ladungsverteilung, das Vektorpotential $\vec{A}$ alleine gegeben ist durch das Dipolpotential, gemäß

$$\vec{A} = \vec{A}^D = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \vec{m} \times \vec{r}$$

Somit ergibt sich dann das $\vec{B}$-Feld als

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m} r^2}{r^5}$$

Bemerkung: Wir beweisen diese Aussage am Ende dieser Aufgabe! Zuerst widmen wir uns der Bestimmung des magnetischen Dipolmomentes $\vec{m}$.
Die Kugel

$$K := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{r}| < R\right\}$$

rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$ um die z-Achse. Der Beobachter befinde sich o.B.d.A im Punkt $\vec{r} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Das magnetische Dipolmoment einer beliebigen Stromverteilung ist gegeben durch

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_K \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\ dV = \frac{1}{2} \int_K \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})\ dV$$

Speziell für eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ rotierende Ladungsverteilung, also $\vec{v}(\vec{r}) = \omega \times \vec{r}$, kann man schreiben

$$\vec{m} = \frac{\omega}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \times (\vec{e}_z \times \vec{r})\ dV \overset{*}{=} \frac{\omega}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot (r^2 \vec{e}_z - z\vec{r})\ dV = \frac{\omega}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot (r_{xy}^2 \vec{e}_z - z\vec{r}_{xy})\ dV$$

(*) : BAC-CAB Regel
wobei $\vec{r}_{xy} := x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ die Projektion von $\vec{r}$ in die XY-Ebene sei. Betrachten wir ferner nur Volumina V die Zylindersymmetrisch sind, d.h in Zylinderkoordinaten (r_{xy}, φ, z):

$$V = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : r_{xy} \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ z \in [z_1(r_{xy}), z_2(r_{xy})]\right\}$$

und kugelsymmetrische Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, erhält man

$$\vec{m} = \frac{\omega}{2} \cdot \left\{\int_V \rho(r) \cdot r_{xy}^2 \vec{e}_z\ dV - \int_V \rho(r) \cdot z\vec{r}_{xy}\ dV\right\}$$

$$= \frac{\omega}{2} \cdot \left\{\int_V \rho(r) \cdot r_{xy}^2 \vec{e}_z\ dV - \int_0^R \int_{z_1(r_{xy})}^{z_2(r_{xy})} r_{xy} \rho\left(\sqrt{r_{xy}^2 + z^2}\right) z \underbrace{\int_0^{2\pi} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)\ d\varphi}_{0}\ dz\ dr_{xy}\right\}$$

$$= \frac{\omega}{2} \cdot \int_V \rho(r) r_{xy}^2 \vec{e}_z\ dV$$

a) Für den Fall $\rho(\vec{r}) = \eta_0 \cdot \delta(r - R)$ erhält man für die Kugel K

$$\vec{m} = \frac{\omega\eta_0}{2} \cdot \underbrace{\int_{\partial K} r_{xy}^2\ dA}_{T_s}\ \vec{e}_z = \frac{\omega Q R^2}{3} \cdot \vec{e}_z$$

wobei

$$T_s = \frac{8\pi R^4}{3}$$

das Trägheitsmoment einer Kugelschale der Flächenmassendichte 1 und dem Radius R bzgl. der z-Achse ist. Somit ergibt sich das magnetische Feld als

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m} r^2}{r^5} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{12\pi} \cdot \frac{\left(3r_z \vec{r} - r^2 \vec{e}_z\right)}{r^5}}$$

b) Für den Fall einer homogenen Ladungsverteilung ($\rho(\vec{r}) = \rho_0$), erhält man für die Kugel K das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{\omega\rho_0}{2} \cdot \underbrace{\int_K r_{xy}^2 dV}_{T_k} \vec{e}_z = \frac{\omega Q R^2}{5} \cdot \vec{e}_z$$

wobei

$$T_k = \frac{2R^2}{5} \operatorname{vol}(K)$$

genau das Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R und der Massendichte 1 bzgl. der z-Achse ist! Somit ergib sich für das Magnetfeld am Ort $\vec{r}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{20\pi} \cdot \frac{\left(3 r_z \vec{r} - r^2 \vec{e}_z\right)}{r^5}}$$

Bemerkung: Durch die Definition des magnetischen Dipolmomentes, ergibt sich für eine sich bewegende Ladungsverteilung V mit einem konstantem Verhältniss

$$\lambda = \frac{\rho_l(\vec{r})}{\rho_m(\vec{r})} : const$$

zwischen Ladungsdichte ρ_l und Massendichte ρ_m, folgender Zusammenhang:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_K \rho_l(\vec{r}) \cdot \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) \; dV = \frac{\lambda}{2} \int_K \rho_m(\vec{r}) \cdot \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) \; dV = \frac{\lambda}{2} \cdot \vec{L}$$

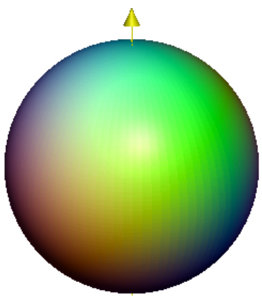
zwischen dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$ und dem Drehimpuls $\vec{L}$ der Ladung! Man hätte sich also gleich einen großen Teil der Rechnung sparen können, indem man z.B $\lambda = 1$ setzt!

Nachträglicher Beweis der Aussage über das Vektorpotential: Betrachten eine kugelsymmetrische, mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ rotierende, Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$$

innerhalb der Kugel

$$K_R = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{r}| \le R\right\}$$



Das Dipolpotential $\vec{A}^D$ ergibt sich als

$$\vec{A}^D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 \omega}{8\pi r^3} \cdot \int\limits_{K_R} \rho(r') \cdot r'^2_{xy} \; dV' \; \cdot \vec{e}_z \times \vec{r}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega}{8\pi r^3} \cdot \int\limits_0^R \rho(t) \underbrace{\left[\int_{\partial K_t} r'^2_{xy} \; dA'\right]}_{T_s} dt \; \cdot \vec{e}_z \times \vec{r} = \frac{\mu_0 \omega}{3 r^3} \cdot \left(\int_0^R \rho(t) t^4 \; dt\right) \cdot \vec{e}_z \times \vec{r}$$

Wir zeigen jetzt dass das eigentliche Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_K \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' = \frac{\mu_0\omega}{4\pi}\int\limits_0^R \left[\int_{\partial K_t} \rho(t)\vec{e}_z \times \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA'\right]\,dt = \frac{\mu_0\omega}{4\pi}\vec{e}_z \times \int\limits_0^R \rho(t)\left[\int_{\partial K_t} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA'\right]\,dt$$

identisch mit $\vec{A}^D$ ist. Wir wollen erstmal folgende allgemeine Beziehung zeigen:

$$\int\limits_{\partial K_t} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA' = \frac{4\pi t^4}{3r^3}\cdot\vec{r}$$

Dazu setzen wir o.B.d.A $\vec{r} = r\vec{e}_x$ und schreiben:

$$\int\limits_{\partial K} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA' = \int\limits_{\partial K} \frac{(x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z)}{\sqrt{r^2+R^2-2rx'}}\,dA'$$

Die y und z-Komponenten heben sich aufgrund der Zylindersymmetrie bzgl. der x-Achse durch die Integration auf. Somit hat der Ausdruck nur eine x-Komponente, und wir können schreiben:

$$\int\limits_{\partial K} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA' = \int\limits_{\partial K} \frac{x'\vec{e}_x}{\sqrt{r^2+R^2-2rx'}}\,dA' = \int_{-R}^{R} \frac{2\pi R x'\vec{e}_x}{\sqrt{r^2+R^2-2rx'}}\,dx'$$

$$= -\frac{2\pi R}{3r^2}\cdot\left[\sqrt{r^2+R^2-2rx'}\cdot\left(r^2+R^2+rx'\right)\right]_{-R}^{R}\cdot\vec{e}_x = \frac{4\pi R^4}{3r^2}\cdot\vec{e}_x = \frac{4\pi R^4}{3r^3}\cdot\vec{r}$$

Setzen oberes in $\vec{A}$ ein und bekommen

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\omega}{4\pi}\vec{e}_z \times \int\limits_0^R \rho(t)\frac{4\pi t^4}{3r^3}\cdot\vec{r}\,dt = \frac{\mu_0\omega}{3r^3}\cdot\left(\int_0^R \rho(t)t^4\,dt\right)\cdot\vec{e}_z\times\vec{r} = \vec{A}^D \quad \Box$$

Fazit: Das Dipolpotential $\vec{A}^D$ einer Kugelsymmetrischen, starren, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden, Ladungsverteilung, ist außerhalb der Kugel identisch mit dem eigentlichen Vektorpotential $\vec{A}$.