Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 09 - Lösungen

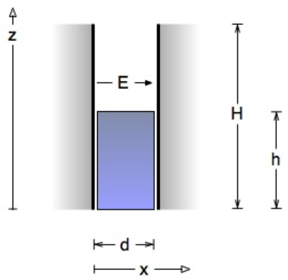
Stilianos Louca

23. Dezember 2007

Aufgabe 01

Annahme: Es kann beliebig viel Dielektrikum in den Kondensator *nachfließen*!
Bemerkung: Wir nennen um: $h \to H$ und $y \to h$.

a) Da wir die beiden Teile des Kondensators ($z < h$ und $z > h$) als zwei Plattenkondensatoren $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ betrachten können, ist das E-Feld in beiden Teilen homogen und senkrecht zu den Platten gerichtet.



Aufgrund der Übergangsbedingung des E-Feldes an der Grenze des Dielektrikums $\mathcal{E}$ (Tangentialkomponente stetig an den Grenzen), müssen die beiden Felder gleich sein. Es herrsche also innerhalb des gesamten Kondensators das gleiche Feld

$$\vec{E} = E\vec{e}_x = \frac{U}{d}\vec{e}_x$$

Somit ist das $\vec{D}$-Feld gegeben durch

$$\vec{D} = D\vec{e}_x = \begin{cases} \varepsilon_0\varepsilon_r E\vec{e}_x & : z < h \\ \varepsilon_0 E\vec{e}_x & : z > h \end{cases}$$

Die gesamte, im Kondensator $\mathcal{C}$ gespeicherte Feld-Energie W ist gegeben durch

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{D}\ dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} ED\ dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_1} \varepsilon_0\varepsilon_r E^2\ dV + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_2} \varepsilon_0 E^2\ dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot(\varepsilon_r \operatorname{vol}(\mathcal{C}_1) + \operatorname{vol}(\mathcal{C}_2)) = \frac{\varepsilon_0 dbE^2}{2}\cdot(h(\varepsilon_r - 1) + H) = \frac{\varepsilon_0 bU^2}{2d}\cdot(h(\varepsilon_r - 1) + H)$$

Allgemein gilt für die Oberflächenladungsdichte an den Kondensatorplatten:

$$\eta(z) = D(z) = \begin{cases} \varepsilon_0\varepsilon_r E & : z < h \\ \varepsilon_0 E & : z > h \end{cases}$$

Somit ergibt sich eine Gesamtladung pro Platte

$$Q = b\int_0^H \eta(z)\ dz = b\varepsilon_0 E \cdot (h_0(\varepsilon_r - 1) + H) = \underbrace{\frac{b\varepsilon_0}{d} \cdot (h(\varepsilon_r - 1) + H)}_{C(h)} \cdot U$$

Bei einer Verschiebung dh des Dielektrikums, ändert sich die Feldenergie um

$$dW = \frac{\partial W}{\partial h} dh = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} dh$$

Gleichzeitig ändert sich die Kapazität $C(h)$ so dass sich die auf den Platten befindende Ladung ändert um

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial h} dh = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)bU}{d} dh$$

Demnach ändert sich die gesamte Potentielle Energie des **Kondensator-Spannungsquelle Systems** um

$$d\Phi = dW - UdQ = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} dh$$

Die Treibende Kraft ergibt sich also als

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{d\Phi}{dh} \cdot \vec{e}_z = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} \cdot \vec{e}_z}$$

Bemerkung: Das Dielektrikum wird in den Kondensator reingezogen! Obwohl sich die Feldenergie dabei erhöht, nimmt die gesamte potentielle Energie ab[1]. Der Energieunterschied wird in kinetische Energie des Dielektrikums umgewandelt!

b) Nach Trennung der Spannungsquelle (Anfangshöhe des Dielektrikums h_0) vom Kondensator **bleibt Q konstant**. Somit ergibt sich für die jetzt Variierbare Spannung an den Platten

$$U(h) = \frac{Q}{C(h)} = \frac{Qd}{b\varepsilon_0 \left(h(\varepsilon_r - 1) + H\right)}$$

Wir hatten vorhin gesehen dass die im Kondensator gespeicherte Feld-Energie gegeben ist durch

$$W = \frac{\varepsilon_0 bU^2}{2d} \cdot (h(\varepsilon_r - 1) + H) = \frac{Q^2 d}{2b\varepsilon_0 \left(h(\varepsilon_r - 1) + H\right)}$$

Analog ergibt sich jetzt die Kraft bei einer Dielektrikumshöhe h als

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W = -\frac{\partial W}{\partial h} \cdot \vec{e}_z = \frac{Q^2 d(\varepsilon_r - 1)}{2b\varepsilon_0 \left(h(\varepsilon_r - 1) + H\right)^2} \cdot \vec{e}_z = \frac{b\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2d} \cdot \frac{\left(h_0(\varepsilon_r - 1) + H\right)^2}{\left(h(\varepsilon_r - 1) + H\right)^2} \cdot U^2 \cdot \vec{e}_z$$

wobei diesmal im Gegensatz zu vorhin kein Strom fliest! Der Kondensator ist ein **abgeschlossenes System**! Speziell am Zeitpunkt der Trennung, bzw. für $h = h_0$ also

$$\boxed{\vec{F} = \frac{b\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2d} \cdot U^2 \cdot \vec{e}_z}$$

[1] Bemerke: Kondensator kein abgeschlossenes System!

Aufgabe 02

Wir setzen das Koordinatensystem so dass in Kugelkoordinaten für $\vartheta = 0$ gilt $\vec{r} \parallel \vec{e}_z$.

a) Da das ursprüngliche Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$ homogen war, muss $\rho_{ext} = \operatorname{div} \vec{E} = 0$ sein. Somit ergibt sich für das (nach Einführung der Kugel entstehende) $\vec{D}$-Feld auch $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{ext} = 0$. Da beide Medien (Kugel und Umgebungsmaterial) homogen, isotrop sind, in beiden

$$\vec{D}^j = \varepsilon_0 \varepsilon_j \vec{\mathcal{E}}_j, \; j = 1,2$$

wobei $\vec{\mathcal{E}}$ das neue elektrische Feld ist ($\vec{\mathcal{E}}_1$ außen und $\vec{\mathcal{E}}_2$ innen)! Somit muss auch $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}}$ sein weshalb das Potential Φ von $\vec{\mathcal{E}}$ innerhalb der beiden Medien die Laplace Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

erfüllen muss! Die allgemeine Lösung dieser DGL lässt sich, in Anbetracht der azimutalen Symmetrie des Problems, darstellen als

$$\Phi(\rho, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l \rho^l + B_l \rho^{-(l+1)} \right) P_l(\vartheta)$$

Wir unterscheiden zunächst zwischen innerem Potential Φ_2 und äußerem Potential Φ_1:

$$\Phi_j(\rho, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l^j \rho^l + B_l^j \rho^{-(l+1)} \right) P_l(\vartheta), \; j = 1,2$$

Wir fordern dass $\Phi_2(\rho = 0)$ endlich bleibt, weshalb

$$B_l^2 = 0 \; \forall \; l \; \rightarrow \; \Phi_2(\rho, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^2 \rho^l P_l(\vartheta)$$

sein muss! Ferner fordern wir dass

$$\lim_{\rho \to \infty} \vec{\mathcal{E}} \stackrel{!}{=} E\vec{e}_z$$

ist, weshalb wir erhalten

$$\lim_{\rho \to \infty} \vec{\mathcal{E}} = - \lim_{\rho \to \infty} \operatorname{grad} \Phi_1(\rho, \vartheta) = - \lim_{\rho \to \infty} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta \right]$$

$$= - \lim_{\rho \to \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_l^1 \rho^{l-1} - \underbrace{(l+1) B_l^1 \rho^{-(l+2)}}_{\to 0} \right] P_l(\vartheta) \cdot \vec{e}_\rho - \lim_{\rho \to \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l^1 \rho^{l-1} + \underbrace{B_l^1 \rho^{-(l+2)}}_{\to 0} \right] \frac{\partial P_l(\vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \stackrel{!}{=} E\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \; A_l^1 \stackrel{!}{=} 0 \; für \; l \geq 2 \; \rightarrow \; \lim_{\rho \to 0} \vec{\mathcal{E}} = -A_1^1 P_1(\vartheta) \cdot \vec{e}_\rho - A_1^1 \frac{\partial P_1(\vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta = -A_1^1 \cos\vartheta \cdot \vec{e}_\rho + A_1^1 \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta = -A_1^1 \vec{e}_z \stackrel{!}{=} E\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \; A_1^1 = -E \; \rightarrow \; A_l^1 = \begin{cases} 0 & : l \geq 2 \\ -E & : l = 1 \\ beliebig & : l = 0 \end{cases} \; \rightarrow \; \Phi_1(\rho, \vartheta) = -E\rho P_1(\vartheta) + A_0^1 P_0(\vartheta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^1 \rho^{-(l+1)} P_l(\vartheta)$$

Die beiden Potentiale müssen jetzt irgendwie kompatibel gemacht werden! Dazu nutzen wir zum einen die Stetigkeit von Φ und zum anderen die Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{D}$ am Rand der Kugel. Unter Berücksichtigung der Orthogonalität der $P_l(\vartheta)$ also:

$$\Phi_2(R, \vartheta) \stackrel{!}{=} \Phi_1(R, \vartheta) \; \rightarrow \; \sum_{l=0}^{\infty} A_l^2 R^l P_l(\vartheta) = -ERP_1(\vartheta) + A_0^1 P_0(\vartheta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^1 R^{-(l+1)} P_l(\vartheta)$$

$$Komponentenvergleich \; bzgl. \; P_l : A_0^2 = A_0^1 + \frac{B_0^1}{R} \; \wedge \; A_1^2 = \frac{B_1^1}{R^3} - E \; \wedge \; A_l^2 = \frac{B_l^1}{R^{2l+1}} \; : l \geq 2$$

und

$$D_\rho^2 \,|_R = -\varepsilon_0\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \,|_R \stackrel{!}{=} D_\rho^1 \,|_R = -\varepsilon_0\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \,|_R$$

$$\rightarrow \;\; \varepsilon_2 \sum_{l=0}^{\infty} A_l^2 l R^{l-1} P_l(\vartheta) \stackrel{!}{=} -\varepsilon_1 E P_1(\vartheta) - \varepsilon_1 \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_l^1 R^{-(l+2)} P_l(\vartheta)$$

$$Komponentenvergleich: \;\; 0 = B_0^1 = 0 \;\wedge\; A_1^2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{B_1^1}{R^3} \;\wedge\; A_l^2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\frac{B_l^1}{R^{2l+1}} : l \geq 2$$

Zusammenfassung der beiden Bedingungen für die Koeffizienten ergibt:

$$l \geq 2 : -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\frac{B_l^1}{R^{2l+1}} = \frac{B_l^1}{R^{2l+1}} \;\rightarrow\; B_l^1 = A_l^2 = 0, \quad A_0^2 = A_0^1 : beliebig$$

$$-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{B_1^1}{R^3} = \frac{B_1^1}{R^3} - E \;\rightarrow\; B_1^1 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot E R^3 \;\rightarrow\; A_1^2 = \frac{-3\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot E$$

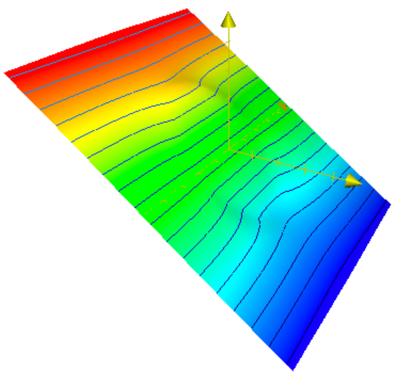
$$\rightarrow \;\; \Phi_1(\rho, \vartheta) = -E\rho P_1(\vartheta) + A_0^1 P_0(\vartheta) + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot \frac{E R^3}{\rho^2} \cdot \cos\vartheta$$

$$\Phi_2(\rho, \vartheta) = A_0^1 P_0(\vartheta) - \frac{3\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot E\rho \cdot \cos\vartheta$$

Da $P_0 \equiv 1$ ist stellt A_0^1 genau die additive Konstante die allgemein beim Potential auftritt dar! Somit können wir o.B.d.A schreiben

$$\boxed{\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{cases} -\dfrac{3\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot E\rho \cdot \cos\vartheta & : \rho < R \\ \\ -E\rho\cos(\vartheta) + \dfrac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)} \cdot \dfrac{E R^3}{\rho^2} \cdot \cos\vartheta & : \rho > R \end{cases}}$$

Oberes Feld sei unten für $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ in Abhängigkeit von z und x in der Ebene $y = 0$ illustriert:

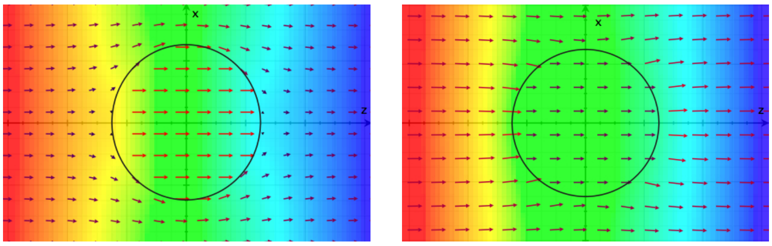


b) Da Elektrische Feld $\vec{\mathcal{E}}$ ergibt sich durch Gradientenbildung

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad}\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{3\varepsilon_1 E}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\cdot\vec{e}_z & : \rho < R \\[2ex] E\vec{e}_z + \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\dfrac{ER^3}{\rho^3}\left(2\cos\vartheta\vec{e}_\rho + \sin\vartheta\vec{e}_\vartheta\right) & : \rho > R \end{cases}}$$

und ist unten in Abhängigkeit von z und x in der Ebene $y=0$ illustriert[2]:

$\varepsilon_1 = 10\varepsilon_2$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2/2$



Bemerke: Länge der Pfeile ist proportional zum Betrag des Feldes!

c) Die Polarisation $\vec{P}$ der Kugel ergibt sich als

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_2-1)\vec{\mathcal{E}}_2 = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1(\varepsilon_2-1)E}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\cdot\vec{e}_z}$$

d) Wir beginnen mit dem vorhin bestimmten äußeren Potential

$$\Phi_1(\rho,\vartheta) = -E\rho\cos(\vartheta) + \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\frac{ER^3}{\rho^2}\cdot\cos\vartheta = -Ez + \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\frac{ER^3}{\rho^3}\cdot z = -Ez + \underbrace{\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\frac{ER^3}{\rho^3}\vec{e}_z\cdot\vec{r}}_{\Phi_k}$$

wobei der Term Φ_k genau das von der *Polarisierten* Kugel erzeugte Potential ist. Wir vergleichen mit der entsprechenden Multipolentwicklung

$$\Phi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_k}{\rho} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}_k\cdot\vec{r}}{\rho^3} + o\left(\frac{1}{\rho^3}\right)$$

und bekommen durch Potenzvergleich das Dipolmoment $\vec{p}_k$ der Kugel:

$$\boxed{\vec{p}_k = 4\pi\varepsilon_0\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}ER^3\cdot\vec{e}_z}$$

Bemerke: Man kann außerdem ablesen dass die gesamte Ladung der Kugel $Q_k = 0$ ist bzw. dass alle anderen Multipolmomente verschwinden!

[2]Dargestellt mit Grapher 1.1