

Theoretische Elektrodynamik

FSU Jena - WS 07/08

Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

14. Dezember 2007

Aufgabe 01

a) Die Strecke S sei parallel zur z -Achse gegeben durch

$$S := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n : z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], x = y = 0 \right\}$$

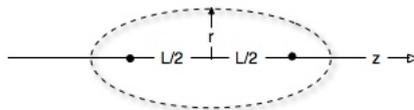
Sei σ die Linienladungsdichte $\sigma = \frac{dQ}{dl}$. Wir wollen zeigen dass die Äquipotentialflächen Rotationsellipsoide um S sind, mit Brennpunktabstand L , das also die Äquipotentialfläche

$$\mathcal{O}_C := \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n : U(\vec{r}) = C \}$$

durch die (elliptische) Parameterdarstellung

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sqrt{\frac{L^2}{4r^2} + 1} \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r : \text{const}, \quad \mathcal{E}_R := \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n : r = R, \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \}$$

gegeben ist, wobei U das Potential im Raum beschreibe.



Bemerkung: Die Vereinigung aller möglichen (wie oben definiert) Flächen \mathcal{E}_R , $R \in (0, \infty)$, ergibt den gesamten Raum um S herum. Gelingt es uns zu zeigen dass für alle $R \in (0, \infty)$ die Fläche \mathcal{E}_R eine Äquipotentialfläche ist, so können wir auch umgekehrt zu einem irgendwo im Raum vorhandenen Potential U_0 die zugehörige Fläche \mathcal{E} finden. Doch da die Äquipotentialfläche die durch einen Punkt geht eindeutig ist, sind auch alle Äquipotentialflächen darstellbar durch \mathcal{E}_R .

Wir haben in Übungsserie (04) Aufgabe (02) gezeigt, dass das Potential in Zylinderkoordinaten (r_z, φ_z, z) gegeben war durch

$$U(r_z, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{(l-z) + \sqrt{(l-z)^2 + r_z^2}}{-(l+z) + \sqrt{(l+z)^2 + r_z^2}} \right)$$

mit $l := \frac{L}{2}$. In Elliptischen Koordinaten (r, ϑ, φ) mit $a = b = 1$ und $c = \sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 1} = \sqrt{\frac{l}{r^2} + 1}$ ist

$$r = r_z \sin \vartheta, \quad z = cr \cos \vartheta = \sqrt{l^2 + r^2} \cos \vartheta$$

Umgeschrieben ergibt sich das Potential also als

$$U(r, \vartheta) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{(l - rc \cos \vartheta) + \sqrt{(l - rc \cos \vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}}{-(l + rc \cos \vartheta) + \sqrt{(l + rc \cos \vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}} \right)$$

Sei $\mathcal{E}_R \subset \mathbb{R}^n$ mit $R > 0$ konstant. Dann gilt für $\vec{r} \in \mathcal{E}_R$

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{(l - \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta) + \sqrt{(l - \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}}{-(l + \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta) + \sqrt{(l + \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}} \right) \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{(l - \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta) + \sqrt{(\sqrt{l^2 + R^2} - l \cos \vartheta)^2}}{-(l + \sqrt{l^2 + R^2} \cos \vartheta) + \sqrt{(\sqrt{l^2 + R^2} + l \cos \vartheta)^2}} \right) \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{l(1 - \cos \vartheta) + \sqrt{l^2 + R^2}(1 - \cos \vartheta)}{-l(1 - \cos \vartheta) + \sqrt{l^2 + R^2}(1 - \cos \vartheta)} \right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + R^2}}{-l + \sqrt{l^2 + R^2}} \right) : \text{const} \end{aligned}$$

Die Fläche \mathcal{E}_R ist also für alle R eine Äquipotentialfläche! \square

- b) Bei den vorigen betrachteten Rotationsellipsoidflächen \mathcal{E}_R waren die Hauptachsenlängen a, b gegeben durch $a = b = r$. Wir identifizieren jetzt die beiden Hauptachsenlängen a und b der beiden Kondensatorschalen mit jeweils r_1 und r_2 und beschreiben deren Punkte mit jeweils \mathcal{E}_{r_1} und \mathcal{E}_{r_2} , wobei auch hier L der Abstand zwischen den beiden Brennpunkten sei und o.B.d.A $a < b$. Zwischen den Schalen existieren keine Ladungen, und somit gilt dort $\Delta U = 0$. An den Schalen ist das Potential konstant, sie stellen also Äquipotentialflächen dar.

Es liegt nahe dass durch gegebene Ladungen Q_i auf den beiden Kondensatorflächen der Potentialunterschied eindeutig ist. Ebenso sind durch ein gegebenes Potential $U(\vec{r})$ die Ladung an den beiden Schalen eindeutig bestimmt. Finden wir also ein Potential das die Randbedingungen $U(\mathcal{E}_{r_1}) = U_1$, $U(\mathcal{E}_{r_2}) = U_2$ erfüllt, so können wir auf die Ladungen Q_i rückschließen.

Wir betrachten das Feld zwischen den beiden Schalen (Bereich \mathcal{B}_1). Das Feld sieht dort genau so aus als wenn sich auf der Symmetrieachse z der Anordnung eine mit der Flächenladungsdichte geladene Strecke S der Länge L befände. Dabei ist σ geeignet zu wählen so dass folgendes erfüllt ist:

- Das Potential auf \mathcal{E}_{r_1} ist gegeben durch U_1 . O.B.d.A sei $U_1 = 0$.
- Das Potential auf \mathcal{E}_{r_2} ist gegeben durch $U_2 = U_1 + V = V$.

Wir verwenden das Ergebnis der vorigen Aufgabe, und fordern also:

$$0 = U_1 = A + \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r_1^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r_1^2}} \right), \quad V = U_2 = A + \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r_2^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r_2^2}} \right), \quad A \in \mathbb{R},$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r_1^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r_1^2}} \right) \\ \rightarrow V = U_2 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r_2^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r_2^2}} \right) - \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r_1^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r_1^2}} \right) \right] \\ \rightarrow \sigma &= \frac{4\pi\epsilon_0 V}{\ln \left(\frac{(l + \sqrt{l^2 + r_2^2}) \cdot (-l + \sqrt{l^2 + r_1^2})}{(-l + \sqrt{l^2 + r_2^2}) \cdot (l + \sqrt{l^2 + r_1^2})} \right)} \end{aligned}$$

Die gesamte Ladung dieser Strecke wäre gegeben durch

$$Q_s = 2l\sigma$$

Betrachten wir jetzt den Fluss durch die Fläche $\mathcal{E}_{r_1+\varepsilon}$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein sei. Dann ergebe sich der Fluss \mathcal{P}_1 zum einen (geladene Strecke) aus

$$\mathcal{P}_1 = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} = \frac{2l\sigma}{\varepsilon_0}$$

und zum anderen (Kondensator) aus

$$\mathcal{P}_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

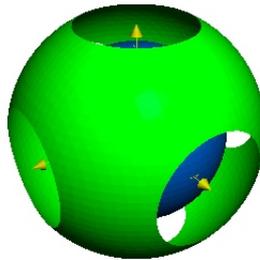
da die Felder im einen oder anderen Fall im Bereich \mathcal{B}_1 identisch sind. Somit ist die Ladung auf der inneren Schale gegeben durch

$$Q_1 = Q_s = 2l\sigma$$

Damit ergibt sich eine Kapazität von

$$C = \frac{-Q_1}{V} = \frac{8l\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{(-l + \sqrt{l^2 + b^2}) \cdot (l + \sqrt{l^2 + a^2})}{(l + \sqrt{l^2 + b^2}) \cdot (-l + \sqrt{l^2 + a^2})}\right)}$$

c) Ein Kugelkondensator entspricht genau dem Spezialfall $l = 0$.



Es ergibt sich demnach

$$C_K = 8\pi\varepsilon_0 \cdot \lim_{l \rightarrow 0} \frac{l}{\ln\left(\frac{(-l + \sqrt{l^2 + b^2}) \cdot (l + \sqrt{l^2 + a^2})}{(l + \sqrt{l^2 + b^2}) \cdot (-l + \sqrt{l^2 + a^2})}\right)} \stackrel{*}{=} \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a}$$

(*) : L' Hopital.

Ein Plattenkondensator kann als Grenzfall des Kugelkondensators mit $b = a + d$, $a \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Dabei betrachten wir nur noch einen Anteil k der gesamten inneren Fläche $A = 4\pi a^2$, so dass $kA =: \mathcal{A}$ konstant bleibt. Im Grenzfall ist dann die Kapazität $C_{\mathcal{A}}$ der Teilfläche \mathcal{A} gegeben durch

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C_{\mathcal{A}} = k \lim_{a \rightarrow \infty} C_K$$

wobei C die gesamte Kapazität des sich immer ausdehnenden Kugelkondensators ist. Demnach:

$$C_{\mathcal{A}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}}{4\pi a^2} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 a(a + d)}{d} = \frac{\mathcal{A}\varepsilon_0}{d}$$

Aufgabe 02

- a) Wir betrachten das Verschiebungsfeld $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_g + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}$ wobei \vec{E}_g das gesamte (neue) Elektrische Feld im Raum und \vec{P} die mittlere Polarisationsdichte im Zylinder sei. $\vec{E} = E \vec{e}_x$ ist hier das ursprüngliche Feld. Da das Dielektrikum homogen und demnach auch isotrop ist, können wir schreiben

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}_g$$

wobei ε_r die relative Permittivität des betrachteten Mediums sei (ε_i innerhalb und 1 außerhalb). Wir können außerdem schreiben

$$\vec{D} = D \cos \varphi \vec{e}_\rho - D \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

da \vec{D} parallel zu \vec{e}_x gerichtet ist. Es gilt ferner

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{ext} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{E}_g = 0$$

Für das Potential Φ von \vec{E}_g gilt

$$\vec{E}_g = -\operatorname{grad} \Phi \rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = 0$$

Bemerkung: Dies gilt alles nur da das Dielektrikum homogen ist!

Wir machen einen Potenzreihenansatz

$$U(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{n+\lambda} g_n(\varphi)$$

und erhalten die partielle DGL

$$\begin{aligned} \Delta U &= \sum_n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (f_n g_n)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (f_n g_n)}{\partial \varphi^2} = \sum_n \left[\frac{g_n}{r} \cdot ((n+\lambda)r^{n-1} + (n+\lambda)(n+\lambda-1)r^{n-1}) + r^{n+\lambda-2} g'' \right] \\ &= \sum_n [g_n ((n+\lambda) + (n+\lambda)(n+\lambda-1)) + g_n''] r^{n+\lambda-2} = 0 \end{aligned}$$

Also

$$g_n'' = -g_n (n+\lambda)^2 \rightarrow g_n = a_n \cos((n+\lambda)\varphi + \vartheta_n)$$

Wir fordern $\frac{dg}{d\varphi} \Big|_0 = 0$ da wir dort ein parallel zu \vec{e}_ρ stehendes Feld erwarten! Demnach

$$(n+\lambda) \sin \vartheta_n = 0 \rightarrow \vartheta_n \in \{0, \pi\} : \text{o.B.d.A} : \vartheta_n = 0 \rightarrow g_n(\varphi) = a_n \cos(n\varphi)$$

Da wir bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ das gleiche Potential erwarten, muss gelten

$$(n+\lambda) \frac{\pi}{2} = (n+\lambda) \frac{3\pi}{2} + m\pi \rightarrow \lambda = -n - m \cong m \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \Phi = \sum_n a_n \cos((n+m)\varphi) \cdot r^{n+m} \cong \sum_n a_n \cos(n\varphi) \cdot r^n \quad \text{da } n \in \mathbb{Z}$$

Für negative n interessieren wir uns nicht weil wir mit $\frac{1}{r^n}$ Probleme um den Ursprung bekommen hätten (Singularität).

Es ergibt sich also, zusammen mit der Tatsache dass $\Phi(r=0) \stackrel{!}{=} 0$ sein soll, schließlich im Innenraum:

$$\Phi_i = \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\varphi) \cdot r^n$$

Für den außenraum ergibt sich analog

$$\Phi_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \cos(n\varphi) r^n$$

wobei dies bis auf eine additive Konstante eindeutig ist. Wir setzen also o.B.d.A $b_0 = 0$. Wir fordern dass das Feld im Unendlichen $r \rightarrow \infty$, $\varphi = 0$ identisch mit dem ursprünglichen Feld \vec{E} sei:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{\partial U(r, \varphi=0)}{\partial r} = -\sum_n b_n n r^{n-1} \stackrel{!}{=} E$$

und bekommen

$$b_n = 0 \text{ für } n - 1 > 0$$

Ferner gehen alle Summanden bis auf einen zu 0, und wir bekommen

$$E = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U(r, \varphi = 0)}{\partial r} = -b_1 \rightarrow b_1 = -E$$

Zusammengefasst:

$$\Phi_a(r, \varphi) = -Er \cos \varphi + \sum_{n \geq 1} b_n \cos(n\varphi) r^{-n}$$

b) Durch die Stetigkeit am Zylindermantel ($r = R$) folgt

$$\forall \varphi : \Phi_i(R, \varphi) = \sum_{n \geq 1} a_n R^n \cos(n\varphi) \stackrel{!}{=} \Phi_a(R, \varphi) = -ER \cos \varphi + \sum_{n \geq 1} b_n R^{-n} \cos(n\varphi)$$

$$\Rightarrow n = 1 : a_1 R = -ER + b_1 R^{-1} \rightarrow a_1 = -E + \frac{b_1}{R^2}, \quad n \geq 2 : a_n R^n = b_n R^{-n} \rightarrow a_n = \frac{b_n}{R^{2n}}$$

Die Normalkomponente der beiden \vec{D}_i, \vec{D}_a auf dem Zylindermantel ist gegeben durch

$$\vec{D}_i \cdot \vec{e}_\rho = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}_g \cdot \vec{e}_\rho = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \text{grad } \Phi_i \cdot \vec{e}_\rho = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}, \quad \vec{D}_a = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_a}{\partial r}$$

Wir fordern also $\varepsilon_r \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{R, \varphi} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} \Big|_{R, \varphi} \quad \forall \varphi$ und erhalten

$$\varepsilon_r \cdot \sum_{n \geq 1} n a_n R^{n-1} \cos(n\varphi) \stackrel{!}{=} -E \cos \varphi - \sum_{n \geq 1} n b_n \cos(n\varphi) R^{-n-1}$$

Durch Komponentenvergleich ergibt sich

$$n = 1 : \varepsilon_r a_1 = -E - \frac{b_1}{R^2}, \quad n \geq 2 : \varepsilon_r a_n = -\frac{b_n}{R^{2n}}$$

Vergleichen wir dies mit dem vorigen Ergebnis bekommen wir

$$a_1 = -\frac{2E}{(\varepsilon_r + 1)}, \quad b_1 = ER^2 \cdot \frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 1)}, \quad n \geq 2 : a_n = b_n = 0$$

und schließlich

$$\Phi_i(r, \varphi) = -\frac{2Er}{(\varepsilon_r + 1)} \cdot \cos \varphi, \quad \Phi_a(r, \varphi) = E \cos \varphi \cdot \left[\frac{R^2 (\varepsilon_r - 1)}{r (\varepsilon_r + 1)} - r \right]$$

c) Das Feld ergibt sich innen und außen jeweils als:

$$\vec{E}_i = -\text{grad } \Phi_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \cdot \vec{e}_\rho - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{2E}{\varepsilon_r + 1} \cdot (\cos \varphi \cdot \vec{e}_\rho - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{E}_a = -\text{grad } \Phi_a = E \cos \varphi \cdot \left[\frac{R^2 (\varepsilon_r - 1)}{r^2 (\varepsilon_r + 1)} + 1 \right] \cdot \vec{e}_\rho + E \sin \varphi \cdot \left[\frac{R^2 (\varepsilon_r - 1)}{r^2 (\varepsilon_r + 1)} - 1 \right] \cdot \vec{e}_\varphi$$

d) Wir verwenden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schreiben die Felder um in Kartesische Koordinaten:

$$\vec{E}_i = \frac{2E}{\varepsilon_r + 1} \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_a = E \cdot \left[\frac{R^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 1)} + 1 \right] \cdot \vec{e}_x + E \cdot \frac{2xyR^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 1)} \cdot \vec{e}_y$$