Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

18. Dezember 2009

Aufgabe 01

a) Wir machen den Ansatz

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + F(\vec{r},\vec{r}\,')$$

und fordern

$$G(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{x=0} = G(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{y=0} = 0 \quad , \quad \Delta F(\vec{r},\vec{r}\,') \stackrel{!}{=} 0$$

Wir bekommen also

$$F(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{x=0} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x'^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$F(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{y=0} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+y'^2+(z-z')^2}}$$

und machen den Ansatz

$$F(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{A_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z')^2}} + \frac{A_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z')^2}}$$

$$+ \frac{A_3}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z')^2}}$$

$$\rightarrow\ F(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{x=0} = \frac{A_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x_1^2+(y-y_1)^2+(z-z')^2}} + \frac{A_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x_2^2+(y-y_2)^2+(z-z')^2}}$$

$$+ \frac{A_3}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x_3^2+(y-y_3)^2+(z-z')^2}}$$

$$F(\vec{r},\vec{r}\,')\mid_{y=0} = \frac{A_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+(z-z')^2}} + \frac{A_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+(z-z')^2}}$$

$$+ \frac{A_3}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_3)^2+y_3^2+(z-z')^2}}$$

Ferner fordern wir $A_1 = A_3 = -A_2 = -1$. Wir machen den Ansatz $|x_1| = |x_2|\,,\ y_1 = y_2$ weshalb sich die beiden ersten Summanden in der 1. Gleichung wegheben. Somit ist ersichtlich dass gelten muss $|x_3| = |x'|$ und $y_3 = y'$.
Analog für die 2. Gleichung, machen wir den Ansatz $|y_3| = |y_2|\,,\ x_3 = x_2$ weshalb sich erneut die ersten beiden

Summanden wegheben. Dann liegt nahe: $x_1 = x'$ und $|y_1| = |y'|$.
Zusammengefast haben wir also: $y_3 = y',\ y_1 = y_2,\ x_3 = x_2,\ x_1 = x',\ |x_1| = |x_2| = |x_3| = |x'|\ \ |y_1| = |y_2| = |y_3| = |y'|$.
Wäre $x_1 = x_2$ dann wäre $x' = x_1 = x_2 = x_3\ \wedge\ y' = y_3$ und somit aber $\Delta F \neq 0$. Analog, wäre $y_2 = y_3$ dann wäre $y' = y_3 = y_2 = y_1,\ \wedge\ x_1 = x'$ weshalb wieder $\Delta F \neq 0$ wäre. Also muss gelten: $x_1 = -x_2 = -x_3 = x'$ und $y_1 = y_2 = -y_3 = -y'$:

$$\vec{r}_1(\vec{r}\,') = \begin{pmatrix} x' \\ -y' \\ z' \end{pmatrix},\ \vec{r}_2(\vec{r}\,') = \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ z' \end{pmatrix},\ \vec{r}_3(\vec{r}\,') = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

und demnach

$$\boxed{G(\vec{r},\ \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_3|}\right]}$$

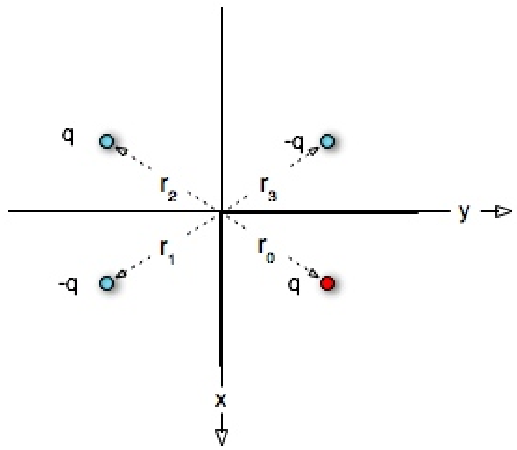
b) Sei Φ_0 das Potential der Leitergrenze L. Seien $s_i^j \in \{\pm 1\}$ so dass $x_i^j = s_i^j \cdot x_0^j,\ i = 0, 1, 2, 3$ wobei x_i^j die j-te Komponente des i-ten Ortsvektors ist.
Bemerkung: Die s_i^j sind aus den gefundenen $\vec{r}_i$ eindeutig bestimmt:

$$\left(s_i^j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ergibt sich das Potential aus dem Potential Φ_0 des Leiters, dem Potential der Ladung $q =: q_0$ an der Stelle $\vec{r}_0$ und dem Potential der 3 Spiegelladungen $q_i = A_i \cdot q$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=0}^{3} \frac{A_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i(\vec{r}_0)|} + \Phi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=0}^{3} \frac{A_i}{\sqrt{(x - s_i^1 x_0)^2 + (y - s_i^2 y_0)^2 + (z - s_i^3 z_0)^2}} + \Phi_0$$

wobei $A_i := (-1)^i$ und $\vec{r}_i(\vec{r}_0)$ die oberen definierten Spiegelladungs-Ortsvektoren sind:



c) Sei

$$L_x := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ y \geq 0\right\},\ L_y = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x \geq 0\right\},\ L = L_x \cup L_y$$

Die Flächenladungsdichte $\eta(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\eta(\vec{r}) = \begin{cases} -\varepsilon_0 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & : \vec{r} \in L_x \\[2ex] -\varepsilon_0 \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & : \vec{r} \in L_y \end{cases}$$

also

$$\eta(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = \frac{q}{4\pi} \sum_{i=0}^{3} \frac{A_i (x^k - s_i^k x_0^k)}{((x - s_i^1 x_0)^2 + (y - s_i^2 y_0)^2 + (z - s_i^3 z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} : \vec{r} \in L_k$$

d) Demnach ergibt sich eine Gesamtladung $Q = Q_x + Q_y$ auf den Leitern L_x und L_y:

$$Q_x = \int_{L_x} dA\ \eta(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{A_i(x - s_i^1 x_0)}{((x - s_i^1 x_0)^2 + (y - s_i^2 y_0)^2 + (z - s_i^3 z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\ dy\ dz$$

$$= -\frac{q x_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} A_i s_i^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-s_i^2 y_0}^{\infty} \frac{1}{((s_i^1 x_0)^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2)^{\frac{3}{2}}}\ d\hat{y}\ d\hat{z}$$

$$= -\frac{q x_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} A_i s_i^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hat{y}_i}{((s_i^1 x_0)^2 + \hat{z}_i^2) \cdot \sqrt{(s_i^1 x_0)^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2}} \right]_{\hat{y}_i = -s_i^2 y_0}^{\infty} d\hat{z}$$

$$= -\frac{q x_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} A_i s_i^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{s_i^2 y_0}{((s_i^1 x_0)^2 + \hat{z}_i^2) \cdot \sqrt{(s_i^1 x_0)^2 + (s_i^2 y_0)^2 + \hat{z}_i^2}} + \frac{1}{((s_i^1 x_0)^2 + \hat{z}_i^2)} \right] d\hat{z}$$

$$= -\frac{q x_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} A_i s_i^1 \cdot \left[s_i^2 y_0 \cdot \frac{\arctan\left(\frac{|s_i^2 y_0| \hat{z}_i}{|s_i^1 x_0| \cdot \sqrt{(x_i^1 x_0)^2 + (s_i^2 y_0)^2 + \hat{z}_i^2}} \right)}{|s_i^1 x_0| \cdot |s_i^2 y_0|} + \frac{1}{|s_i^1 x_0|} \cdot \arctan\left(\frac{\hat{z}}{|s_i^1 x_0|} \right) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{3} A_i s_i^1 \cdot \left[2 s_i^2 \cdot \arctan\left(\frac{y_0}{x_0} \right) + \pi \right] = -\frac{q}{4\pi} \cdot \left[2 \arctan\left(\frac{y_0}{x_0} \right) \cdot (1 + 1 + 1 + 1) + \pi \cdot (1 - 1 - 1 + 1) \right]$$

$$= -\frac{2q}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y_0}{x_0} \right)$$

$$Analog: \ Q_y = -\frac{2q}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{x_0}{y_0} \right) \ \rightarrow \ Q = -\frac{2q}{\pi} \cdot \left[\arctan\left(\frac{y_0}{x_0} \right) + \arctan\left(\frac{x_0}{y_0} \right) \right] = -q$$

Variante: Im Bereich

$$V := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

sieht das Feld so aus als gäbe es nur die 3 Scheinladungen & die Ursprungsladung q, sonst nichts. Der gesamte Fluss $\mathcal{P}$ durch ∂V ist gegeben durch

$$\mathcal{P} = \int_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{q + Q_{ind}}{\varepsilon_0}$$

insofern man den Rand ∂V innerhalb des Leiters setzt, also bei $x = 0$ bzw. $y = 0$ das Feld als 0 annimmt. Dann ist $\mathcal{P}$ genau der Fluss durch die restliche Fläche

$$A_R := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x, y > 0 \right\}$$

wobei wir $R \to \infty$ gehen lassen:

$$\mathcal{P} = \int_{\partial V} \vec{E}(\vec{r})\ d\vec{A} = \lim_{R \to \infty} \int_{A_R} \vec{E}(\vec{r})\ d\vec{A} = \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \vec{E}(R, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}_\rho\ R^2\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi$$

$$\sim \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Q}{R^2} + \frac{p}{R^3} + \frac{D_{ij}}{R^4} + o\left(\frac{1}{R^5} \right) \right] \cdot \vec{e}_\rho\ R^2\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi$$

wobei $Q = 0$ die gesamte Ladung, $p = 0$ das Dipolmoment und D_{ij} das Quadrupolmoment der 4 Ladungen sind. Also

$$\mathcal{P} \sim \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{D_{ij}}{R^2} + o\left(\frac{1}{R^3} \right) \right] \cdot \vec{e}_\rho\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi = 0$$

Demnach muss

$$Q_{ind} = -q$$

sein. $\square$

e) Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Raum $x > 0, y > 0$ sieht so aus als wenn es 4 Ladungen in der oben illustrierten Anordnung gäbe, und weiter nichts. Demnach ergibt sich die Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung q als die Summe der von den anderen 3 *virtuellen* Spiegelladungen resultierenden Kräfte $\vec{F}_i$:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{3} A_i \sum_{k=1}^{3} \frac{(x_0^k - x_i^k)}{((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_k$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{2x_0}{(4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x_0}{(4x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{e}_x + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{2y_0}{(4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2y_0}{(4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{e}_y$$

$$= -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y_0^2}{x_0^2} \cdot \frac{\left(y_0^4 + 3x_0^4 + 3y_0^2 x_0^2\right)}{\left(x_0^3 \left(x_0^2 + y_0^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(x_0^2 + y_0^2\right)^3\right)} \cdot \vec{e}_x - \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_0^2}{y_0^2} \cdot \frac{\left(x_0^4 + 3y_0^4 + 3x_0^2 y_0^2\right)}{\left(y_0^3 \left(x_0^2 + y_0^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(x_0^2 + y_0^2\right)^3\right)} \cdot \vec{e}_y$$

Aufgabe 02

a) Das Potential $\Phi_\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\Phi_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}} \, dV'$$

Demnach ergibt sich genau der gesuchte Ausdruck

$$\Phi_\rho(\vec{r}) - \frac{R}{r} \Phi_\rho \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} \right) = \Phi_\rho(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\frac{r}{R} \sqrt{\frac{r^2 R^4}{r^2} + r'^2 - 2\frac{rR^2}{r^2} r' \cos\gamma}} \, dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{r'^2 r^2}{R^2} - 2rr' \cos\gamma}} \right\} dV' = \Phi(\vec{r})$$

b) **Annahme:** Es handelt sich um einen Punktdipol mit dem Dipolmoment $\vec{p}$ am Ort $\vec{a}$. Dann ist das Dipol-Potential am Ort $\vec{r}$ gegeben durch

$$\Phi_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}$$

und demnach das gesamte Potential durch

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_d(\vec{r}) \underbrace{- \frac{R}{r} \Phi_d \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} \right)}_{\Phi_k}$$

Der zweite Term $\Phi_k(\vec{r})$ ist genau das durch die induzierte Kugelladungsdichte erzeugte Potential:

$$\Phi_k(\vec{r}) = -\frac{R}{r} \Phi_d \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} - \vec{a} \right)}{\left| \frac{R^2}{r^2} \vec{r} - \vec{a} \right|^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r} \cdot \vec{p} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} - \vec{a} \right) \cdot \left[\frac{R^4}{r^2} + a^2 - 2\frac{R^2}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{a} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot \frac{R}{r} \cdot \vec{p} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2} \vec{r} - \vec{a} \right) \cdot \left[\underbrace{\frac{R^4}{r^2 a^2} + 1 - 2\frac{R^2}{r^2 a^2} \vec{r} \cdot \vec{a}}_{x} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Da $x \approx 1$ ist, entwickeln wir bis zum 2. Term um die Stelle $x = 1$ nach Muster

$$x^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}(x-1) + o\left((x-1)^2\right)$$

und erhalten

$$\Phi_k(\vec{r}) = -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 r a^3} \cdot \vec{p} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right) \cdot \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R^4}{r^2a^2} - 2\frac{R^2}{r^2a^2}\vec{r}\cdot\vec{a}\right) + o\left(\left(\frac{R^4}{r^2a^2} - 2\frac{R^2}{r^2a^2}\vec{r}\cdot\vec{a}\right)^2\right)\right]$$

$$= -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 r a^3} \cdot \vec{p} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right) \cdot \left[1 + 3\frac{R^2}{r^2a^2}\vec{r}\cdot\vec{a} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] = \frac{R}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot \vec{p} \cdot \left[\frac{\vec{a}}{r} + \frac{3R^2}{r^3a^2} \cdot \vec{r}\cdot\vec{a} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

Wir vergleichen mit der Multipolentwicklung bis zum Dipolmoment

$$\Phi_k(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_k}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}_k \cdot \vec{r}}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

und erhalten für die Ladung der Kugel

$$\boxed{Q_k = \frac{R}{a^3} \cdot \vec{p} \cdot \vec{a}}$$

c) Es gilt allgemein für die induzierte Ladung Q_i

$$Q_i = -\varepsilon_0 \int_{\partial K} dA\, \frac{\Phi(\vec{r})}{\partial n} = -\varepsilon_0 \int_{\partial K} dA\, \frac{\Phi(\vec{r})}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K} dA \int dV' \rho\left(\vec{r}\,'\right) \cdot \left\{ \frac{(r - r'\cos\gamma)}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(r\frac{r'^2}{R^2} - r'\cos\gamma\right)}{\left(\frac{r^2r'^2}{R^2} + R^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

wobei K die Kugel sei. Wir betrachten jetzt speziell einen aus zwei Punktladungen $-q, q$ entstehenden Dipol, der sich o.B.d.A auf der x-Achse befinde und $\vec{p} \perp \vec{e}_z$ sei. Seien $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ die Ortsvektoren zu den beiden, den Dipol erzeugenden, Ladungen. Also:

$$\vec{p} = q\vec{g} = qg_x\vec{e}_x + qg_y\vec{e}_y, \quad \vec{r}_1 = \vec{a} + \frac{\vec{g}}{2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{a} - \frac{\vec{g}}{2}$$

$$\rho(\vec{r}) = q\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}\right) - q\delta\left(\vec{r}_2 - \vec{r}\right) = q\delta\left(\vec{a} + \frac{\vec{g}}{2} - \vec{r}\right) - q\delta\left(\vec{a} - \frac{\vec{g}}{2} - \vec{r}\right)$$

Dann gilt:

$$Q_i = \frac{q}{4\pi} \int_{\partial K} dA \left\{ \frac{\left(R - \frac{r_1^2}{R}\right)}{\left(R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(R - \frac{r_2^2}{R}\right)}{\left(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$= \frac{qR^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\gamma \left\{ \frac{\left(R - \frac{r_1^2}{R}\right)}{\left(R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(R - \frac{r_2^2}{R}\right)}{\left(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\varphi\, d\gamma$$

$$= qR^2 \cdot \left[\left(R - \frac{r_1^2}{R}\right) \cdot \frac{1}{-2Rr_1\sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\gamma}} - \left(R - \frac{r_2^2}{R}\right) \cdot \frac{1}{-2Rr_2\sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\gamma}}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{2} \cdot \left\{ \left[\frac{r_1 - R}{r_1} - \frac{r_1 + R}{r_1}\right] - \left[\frac{r_2 - R}{r_2} - \frac{r_2 + R}{r_2}\right] \right\} = qR\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

Aus oberem Ergebnis ergibt sich für den Spezialfall $\vec{p} \parallel \vec{a}$, also $r_1 = r_2 + g$, der Wert

$$Q_i = qR\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2 + g}\right]$$

Lassen wir jetzt das ganze zu einem Punktdipol übergehen, mit $p = g \cdot q : const$, erhalten wir genau das Ergebnis der vorigen Aufgabe:

$$\lim_{g\to 0} Q_i = pR \cdot \lim_{g\to 0}\frac{1}{g}\cdot\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2+g}\right] = \frac{pR}{r_2^2} \cong \frac{pR}{a^2} = \frac{R}{a^3}\cdot\vec{p}\cdot\vec{a}$$

Wir betrachten ferner den Grenzfall $R \to \infty$ wobei $r_2 - R =: r$ konstant bleiben soll:

$$\lim_{R\to\infty} qR\left[\frac{1}{R+r} - \frac{1}{R+r+g}\right] = \lim_{R\to\infty}\frac{gqR}{(R+r)(R+r+g)} = 0$$

Die induzierte Ladung geht also zu 0. Dies kann man auch wie folgt erklären: Bei einer Punktladung q vor einer unendlichen Leiter-Ebene, ist der Wert der induzierten Ladung genau $-q$, unabhängig vom Abstand der Ladung von der Fläche! Beide Ladungen induzieren also gegenwertige Ladungen q bzw. $-q$. Die induzierte Ladung geht somit zu 0.
Bemerke: Was für zwei einen Dipol erzeugenden Ladungen gilt, gilt natürlich auch für den Grenzfall $r_2 \to r_1$ was eben genau einem Punktdipol entspricht!

d) Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ außerhalb der Kugel ist identisch mit dem Feld das entstehen würde wenn nur der Dipol $\vec{p}$ und die beiden Spiegelladungen vorhanden wären. Dann ergibt sich die Kraft $\vec{F}$ auf den Dipol als die Summe der von den beiden Spiegelladungen resultierenden Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Seien $\vec{r}_{s1}$ und $\vec{r}_{s2}$ die Ortsvektoren zu den beiden Spiegelladungen $q_{s1},\ q_{s2}$:

$$\vec{r}_{sj} = \frac{R^2}{r_j^2}\cdot\vec{r}_j,\ q_{sj} = -q_j\cdot\frac{R}{r_j}$$

Demnach:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{q_{si}q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_{si}|^3}\cdot(\vec{r}_j - \vec{r}_{si}) = -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{q_iq_j}{r_i\,|\vec{r}_j - \vec{r}_{si}|^3}\cdot(\vec{r}_j - \vec{r}_{si})$$

$$= -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{q_iq_j}{r_i\left|\vec{r}_j - \frac{R^2}{r_i^2}\vec{r}_i\right|^3}\cdot\left(\vec{r}_j - \frac{R^2}{r_i^2}\vec{r}_i\right) = -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{q_iq_j}{r_ir_{ij}^2}\cdot\vec{e}_{ij}$$

wobei

$$\vec{r}_{ij} := \vec{r}_j - \vec{r}_{si} = \vec{r}_j - \frac{R^2}{r_i^2}\vec{r}_i,\ \vec{e}_{ij} := \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

Wir nennen $\vec{e}_x := \dfrac{\vec{a}}{a}$. Für große Abstände $a >> R$ gilt für kleine $g : r_{ij} \approx r_j \approx a$ und $\vec{e}_x \approx \vec{e}_{ij}$ also:

$$\vec{F} = -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\vec{e}_{11}}{r_1r_{11}^2} + \frac{\vec{e}_{22}}{r_2r_{22}^2} - \frac{\vec{e}_{12}}{r_1r_{12}^2} - \frac{\vec{e}_{21}}{r_2r_{21}^2}\right] \approx -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r1^3} + \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1r_2^2} - \frac{1}{r_2r_1^2}\right]\cdot\vec{e}_x$$

$$= -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]\cdot\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right]\cdot\vec{e}_x = -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overbrace{(r_2-r_1)}^{b}{}^2\cdot\overbrace{(r_2+r_1)}^{\approx 2a}}{\underbrace{r_1^3r_2^3}_{\approx a^6}}\cdot\vec{e}_x \approx -\frac{b^2Rq^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a^5}\cdot\vec{e}_x \sim \frac{1}{a^5}\cdot\vec{e}_x$$

Bemerkung: Ein Punktdipol würde genau das gleiche Verhalten aufweisen! Lässt man nämlich $b = r_2 - r_1$ gegen 0 gehen und $q \to \infty$, so dass $\vec{p} = q\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) : const$ bleibt, so ändert sich nichts an dem Ausdruck:

$$\boxed{\vec{F} \approx -\frac{p^2R}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a^5}\cdot\vec{e}_x}$$

Dabei wäre die von einer Leiterkugel auf eine Punktladung q ausgeübte Kraft $\vec{F}_p$ gegeben durch die Kraft die auf die Ladung von ihrer entsprechenden Spiegelladung ausgeübt werden würde:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_s q}{|\vec{a} - \vec{r}_s|^3} \cdot (\vec{a} - \vec{r}_s) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 aR}{|a^2 - R^2|^2} \cdot \vec{e}_\rho$$

Für große $a >> R$ näherungsweise:

$$\vec{F}_p \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 R}{a^3} \sim \frac{1}{a^3}$$

Aufgabe 03

a) Wir zeigen zuerst dass

$$a_n(\vec{r}\,') := -\frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot \Psi_n^*(\vec{r}\,')$$

eine Lösung der Gleichung

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r})$$

ist, dass also

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot \Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r})$$

die Greensche Funktion des Volumens V ist:

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\sum_n \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \Delta \Psi_n(\vec{r}) = -\sum_n \frac{1}{\varepsilon_0} \Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r})$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_n \Psi_n^*(\vec{r}) \cdot \Psi_n(\vec{r}) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\varepsilon_0}$$

$$G(\vec{r}\,', \partial V) = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot \Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \underbrace{\Psi_n(\partial V)}_{0} = 0$$

und außerdem

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot \Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}\,')^* = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot (\Psi_n^*(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r}))^*$$

$$= -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n} \cdot \Psi_n(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n^*(\vec{r}) = G(\vec{r}\,', \vec{r})$$

Zu zeigen ist dass dies die einzige Darstellung ist. Seien $a_n(\vec{r}\,')$ und $b_n(\vec{r}\,')$ so geschaffen dass

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \sum_n a_n(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r}) = \sum_n b_n(\vec{r}\,') \cdot \Psi_n(\vec{r})$$

Dann folgt

$$\sum_n (a_n(\vec{r}\,') - b_n(\vec{r}\,')) \cdot \Psi_n(\vec{r}) = 0$$

$$\rightarrow\; 0 = \left\langle \sum_n (a_n(\vec{r}\,') - b_n(\vec{r}\,')) \cdot \Psi_n(\vec{r}),\; \Psi_m(\vec{r}) \right\rangle = \sum_n (a_n(\vec{r}\,') - b_n(\vec{r}\,')) \cdot \underbrace{\langle \Psi_n(\vec{r}),\; \Psi_m(\vec{r}) \rangle}_{\delta_{nm}} = a_m(\vec{r}\,') - b_m(\vec{r}\,')$$

$$\rightarrow\; a_m = b_m \quad \square$$

b) Wir wollen die partielle Differentialgleichung

$$\Delta\Psi = \lambda\Psi$$

lösen. Wir machen den Ansatz

$$\Psi(x,y,z) = \prod_{i=1}^{3} \Psi_i(x_i)$$

und gehen damit in die DGL ein:

$$\Delta\Psi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k^2} \prod_{i=1}^{3} \Psi_i(x_i) = \Psi_1''\Psi_2\Psi_3 + \Psi_1\Psi_2''\Psi_3 + \Psi_1\Psi_2\Psi_3'' \overset{!}{=} \lambda\Psi_1\Psi_2\Psi_3 \ \forall\ x,y,z$$

und fordern

$$\Psi_i'' \cdot \prod_{k\neq i} \Psi_k \overset{!}{=} h_i \cdot \prod_{k=1}^{3} \Psi_k$$

so dass

$$\sum_i h_i = \lambda$$

Wir bekommen also 3 gewöhnliche DGL deren Lösungen sich wie folgt ergeben:

$$\Psi_i'' = h_i\Psi_i \ \rightarrow\ \Psi_i = A_i e^{\sqrt{h_i}x_i} + B_i e^{-\sqrt{h_i}x_i}, \ \rightarrow\ \Psi = \prod_{i=1}^{3} \left\{ A_i e^{\sqrt{h_i}x_i} + B_i e^{-\sqrt{h_i}x_i} \right\},\ A_i, B_i \in \mathbb{C}$$

Die allgemeine Randbedingung $\Phi(x_i = 0) = \Phi(x_i = a_i) = 0$ ergibt spezieller

$$\Psi_i(0) = \Psi_i(a_i) = 0 \ \rightarrow A_i + B_i = 0 \ \wedge\ A_i e^{\sqrt{h_i}a_i} + B_i e^{-\sqrt{h_i}a_i} = 0 \ \rightarrow\ e^{\sqrt{h_i}a_i} = e^{-\sqrt{h_i}a_i}$$

Wäre $\sqrt{h_i} \in \mathbb{R}$ bzw. $h_i \geq 0$ so würde dies bedeuten $h_i = 0$. Dann ergebe sich die lineare Lösung

$$\Psi_i(x_i) = A_i + B_i x_i$$

was angesichts der Randbedingung bedeuten würde dass $A_i = B_i = 0$ ist. Doch wir interessieren uns nicht für die triviale Lösung, und betrachten den Fall $h_i < 0$. Somit ergibt sich

$$e^{i\sqrt{-h_i}a_i} = e^{-i\sqrt{-h_i}a_i} \ \rightarrow\ \sin\left(\sqrt{-h_i}a_i\right) = 0 \ \rightarrow\ h_i = -\left(\frac{n_i\pi}{a_i}\right)^2 =: h_{in_i},\ n_i \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow\ \Psi_i(x_i) = A_i\left[e^{i\frac{n_i\pi x_i}{a_i}} - e^{-i\frac{n_i\pi x_i}{a_i}}\right] = iA_i \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)$$

und die (n_1, n_2, n_3)-te Lösung

$$\Psi_{n_1,n_2,n_3}(\vec{r}) = \alpha_{n_1n_2n_3} \prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right),\ \alpha_{n_1n_2n_3} \in \mathbb{R}$$

Wir normieren die Eigenfunktionen im Raum V, fordern also

$$\int_V \Psi_{n_1,n_2,n_3}(\vec{r})\Psi^*_{n_1,n_2,n_3}(\vec{r})\ dV \overset{!}{=} 1$$

Wir erhalten somit

$$1 \overset{!}{=} \alpha^2_{n_1n_2n_3} \int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_0^{a_3} \left\{\prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)\right\}^2 dx_3\ dx_2\ dx_1 = \alpha^2_{n_1n_2n_3} \prod_{i=1}^{3} \int_0^{a_i} \sin^2\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)\ dx_i$$

$$= \alpha^2_{n_1n_2n_3} \prod_{i=1}^{3} \frac{a_i}{2} \ \rightarrow\ \alpha_{n_1n_2n_3} = \sqrt{\frac{8}{\prod_{i=1}^{3} a_i}}$$

und schließlich die normierten Eigenfunktionen

$$\boxed{\Psi_{n_1n_2n_3}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8}{\prod\limits_{i=1}^{3} a_i}} \cdot \prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)}$$

Dies ist tatsächlich Lösung des Eigenfunktion-Problems denn

$$\Delta\Psi_{n_1n_2n_3} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{n_k\pi}{a_k}\right)^2}_{\lambda_{n_1n_2n_3}} \cdot \sqrt{\frac{8}{\prod\limits_{i=1}^{3} a_i}} \cdot \prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right) = \lambda_{n_1n_2n_3}\Psi_{n_1n_2n_3}$$

Demnach ergeben sich die Koeffizienten als

$$\boxed{a_n(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0\pi^2 \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{n_k^2}{a_k^2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{\prod\limits_{i=1}^{3} a_i}} \cdot \prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right)}$$

und die Reihendarstellung der Greenschen Funktion als

$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{8}{\varepsilon_0\pi^2 \cdot \prod\limits_{i=1}^{3} a_i} \cdot \sum_{n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{n_k^2}{a_k^2}} \cdot \prod_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{a_i}\right) \sin\left(\frac{n_i\pi x_i'}{a_i}\right)}$$