Institut für Festkörpertheorie und -optik
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik WS 2007/2008
Serie 07

Randwertprobleme

Aufgabe 1): Spiegelladungsmethode an metallischen Ebenen [4 Punkte]

(a) Das Volumen $V = \{\boldsymbol{r}\epsilon R^3 : x \geq 0, y \geq 0\}$ ist bei $x = 0$ und $y = 0$ durch perfekte metallische Leiter begrenzt. Finden Sie die Greensche Funktion $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ mit $\boldsymbol{r'}, \boldsymbol{r}\epsilon V$, wobei $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ über $\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})/\varepsilon_0$ definiert ist.

(b) Bestimmen Sie ferner das Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ bei Anwesenheit einer Punktladung q bei $\boldsymbol{r_0}$.

(c) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte η.

(d) Ermitteln Sie die Gesamtladung auf den Platten (geht auch ohne Integration über die Flächenladungsdichte, Tipp: Gaußscher Satz und Übergangsbedingungen für das $\boldsymbol{E}$-Feld bei Metallen).

(e) Welche Kraft wirkt auf die Punktladung (geht auch ohne Integration über die Flächenladungsdichte).

Aufgabe 2): Randwertproblem mit leitender Kugel [4 Punkte]

(a) Vollziehen Sie die Rechnung aus dem Script für das elektrostatische Potential $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_\rho(\boldsymbol{r}) - \frac{R}{r}\Phi_\rho(\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{r})$ einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(r)$ endlicher Ausdehnung außerhalb einer im Ursprung befindlichen leitenden geerdeten Kugel vom Radius R nach. Hierbei bezeichnet $\Phi_\rho(\boldsymbol{r})$ das Potential von ρ im ansonsten leeren Raum R^3.

(b) Spezialisieren Sie nun die Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ auf den Fall, dass die Ladungsverteilung die eines an der Stelle $\boldsymbol{a}$ befindlichen Dipols $\boldsymbol{p}$ ist. Zeigen Sie, dass der Dipol für den Fall $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a} \neq 0$ auf der Kugeloberfläche eine (nicht im Detail zu berechnende) Flächenladungsdichte mit nichtverschwindender Gesamtladung Q_{ind} induziert (Q_{ind} ist explizit zu bestimmen).

(c) Machen Sie sich auf einem alternativen Weg Q_{ind} plausibel, indem Sie einen parallel zu $\boldsymbol{a}$ orientierten Dipol als Limes zweier Punktladungen erzeugen und Q_{ind} über die beiden entsprechenden Spiegelladungen bestimmen (und damit das Resultat aus b) in diesem Spezialfall reproduzieren). Wieso verschwindet Q_{ind} im Grenzfall $R \to \infty$, in dem aus der leitenden Kugel eine leitende Halbebene wird?

(d) Berechnen Sie nun (im Fall $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a} \neq 0$) die auf den Dipol wirkende Kraft $\boldsymbol{K}$ für große Abstände $a \gg R$ von der Kugel in führender Ordnung von $1/a$ (mit $a \equiv |a|$). Mit welcher Potenz von $1/a$ geht diese Kraft gegen Null und wie vergleicht sich dieser Exponent mit dem derjenigen Kraft, welche von der Leiterkugel auf eine Punktladung ausgeübt wird?

Aufgabe 3): Greensche Funktion als Reihe [4 Punkte]

(a) Eine weitere Methode, die Greensche Funktion für ein Volumen V mit dem Rand ∂V zu bestimmen, ist, sie als Summe der Eigenfunktionen $\Psi_n(\boldsymbol{r})$ des Δ-Operators mit verschwindenden Randbedingungen darzustellen. Die $\Psi_n(\boldsymbol{r})$ sollen also der Differentialgleichung $\Delta\Psi_n(\boldsymbol{r}) = \lambda_n\Psi_n(\boldsymbol{r})$ in V genügen, wobei zusätzlich $\Psi_n(\partial V) = 0$ gelten soll. Mit der Normierung der Funktionen auf 1 ($\int_V \Psi_n^*(\boldsymbol{r})\Psi_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = 1$) erfüllt der so gefundene Satz an Eigenfunktionen automatisch die Vollständigkeitsrelation (so heißt einfach die folgende Eigenschaft):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^*(\boldsymbol{r'})\Psi_n(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})$$

und die Orthogonalitätsbedingung (analog zu Basisvektoren im R^3 bilden hier die Eigenfunktionen eine vollständige orthonormale Basis, das Skalarprodukt zwischen zwei Funktionen $F(\boldsymbol{r})$ und $G(\boldsymbol{r})$ ist definiert als $\int_V F^*(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$):

$$\int_V \Psi_{n'}^*(\boldsymbol{r})\Psi_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \delta_{n,n'}.$$

Wegen der Vollständigkeit kann auch die Greensche Funktion $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ nach den Eigenfunktionen entwickelt werden: $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\boldsymbol{r'})\Psi_n(\boldsymbol{r})$. Zeigen Sie, dass $a_n(\boldsymbol{r'}) = -\frac{1}{\varepsilon_0\lambda_n}\Psi_n^*(\boldsymbol{r'})$ gilt.

(b) Finden Sie die Reihendarstellung der Greenschen Funktion für das Innere des Kastens $\{\boldsymbol{r} : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ mit den Kantenlängen a, b und c, der von perfekten metallischen Leitern begrenzt ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. 12. 2007, vor der Vorlesung