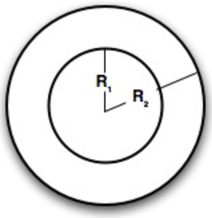
Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

10. Dezember 2007

Aufgabe 01

Nennen K_1 bzw. K_2 die beiden Kugelschalen mit jeweils dem Radius R_1 und R_2. Wir legen das Koordinatensystem in den Mittelpunkt.



Seien q_1 bzw. q_2 die entsprechenden Ladungen auf den beiden Schalen. Aufgrund von Symmetriegründen können wir eine Gleichverteilung der Ladung auf den jeweiligen Flächen annehmen. Dadurch ergibt sich jeweils eine Flächenladungsdichte

$$\eta_i = \frac{q_i}{4\pi R_i^2}$$

bzw. eine Raumladungsdichte in Kugelkoordinaten

$$\rho_i(r,\vartheta,\varphi) = \frac{q_i}{4\pi R_i^2} \cdot \delta(r - R_i)$$

Die gesamte Ladungsdichte ist also

$$\rho(r) = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \cdot \delta(r - R_1) + \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \cdot \delta(r - R_2)$$

Aufgrund von Symmetriegründen sind alle Äquipotentialflächen Kugelflächen mit dem Ursprung als Mittelpunkt, d.h das Elektrische Feld ist ein radialsymmetrisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e}_\rho$$

Durch das Durchflutungsgesetz folgt für das Feld E im Abstand R vom Ursprung:

$$E(R) = \begin{cases} 0 & : R < R_1 \\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & : R \in [R_1, R_2) \\ \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & : R \geq R_2 \end{cases}$$

und dementsprechend für die Energiedichte des Feldes

$$\sigma(R) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(R) = \begin{cases} 0 & : R < R_1 \\ \dfrac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \in [R_1, R_2) \\ \dfrac{(q_1+q_2)^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \geq R_2 \end{cases}$$

Die gesamtenergie W des Kondensators ergibt sich aus Integration der Energiedichte über das gesamte Universum $\mathcal{U}$

$$W = \int_{\mathcal{U}} \sigma(\vec{r})\ dV = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi\rho^2 \cdot \frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0\rho^4}\ d\rho + \int_{R_2}^{\infty} 4\pi\rho^2 \cdot \frac{(q_1+q_2)^2}{32\pi^2\varepsilon_0\rho^4}\ d\rho$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} + \frac{2q_1q_2}{R_2}\right]$$

Der auf die Schalen des Kondensators ausgeübte Druck p_i ergibt sich als

$$p_i = \frac{dF}{dA} = E(R_i) \cdot \frac{\eta_i dA}{dA} = \eta_i \cdot E(R_i)$$

$$\rightarrow\ p_1 = \frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_1^4},\ p_2 = \frac{q_2(q_1+q_2)}{16\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}$$

a) Für $q_1 = Q$ und $q_2 = -Q$ ergibt sich nach oberen Überlegungen

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right],\quad \sigma(R) = \begin{cases} 0 & : R < R_1 \\ \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \in [R_1, R_2) \\ 0 & : R \geq R_2 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_1^4},\ p_2 = 0$$

b) Für $q_1 = Q$ und $q_2 = -Q/2$ analog

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{3}{4R_2}\right],\quad \sigma(R) = \begin{cases} 0 & : R < R_1 \\ \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \in [R_1, R_2) \\ \dfrac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \geq R_2 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_1^4},\ p_2 = -\frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}$$

und für $q_1 = -Q/2,\ q_2 = Q$

$$W = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R_1}, \quad \sigma(R) = \begin{cases} 0 & : R < R_1 \\ \dfrac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \in [R_1, R_2) \\ \dfrac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0 R^4} & : R \geq R_2 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R_1^4},\ p_2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}$$

Bemerkung: Die Vorzeichen der Drücke deuten auf die Richtung hin: Ein negatives Vorzeichen bedeutet eine Kraft nach innen!

Aufgabe 02

Annahme: $\Phi_0 \neq 0$. Wäre nämlich $\Phi_0 = 0$ dann ergibt sich die Lösung einfach aus $\Phi(x, y, z) \equiv 0$.

a) Aufgrund der Symmetrie des Problems hängt Φ nur von x, y ab, d.h $\Phi = \Phi(x, y)$. Die Laplace Gleichung

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

seie lösbar durch den Ansatz

$$\Phi = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y)$$

Wir gehen damit in die DGL ein und erhalten die allgemeine Lösung

$$0 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \Phi_y \cdot \frac{d^2\Phi_x}{dx^2} + \Phi_x \cdot \frac{d^2\Phi_y}{dy^2}$$

$$\rightarrow \frac{\Phi_x''}{\Phi_x} = -\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} \ \ \forall\ x, y \ \rightarrow \frac{\Phi_x''}{\Phi_x} = -\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} =: h : const$$

$$\rightarrow \Phi_x'' - h\Phi_x = 0 \ \wedge\ \Phi_y'' + h\Phi_y = 0$$

$$\rightarrow \Phi_x(x) = A_x e^{x\sqrt{h}} + B_x e^{-x\sqrt{h}},\quad \Phi_y(y) = A_y e^{y\sqrt{-h}} + B_y e^{-y\sqrt{-h}}$$

$$\rightarrow \Phi(x, y) = \left[A_x e^{x\sqrt{h}} + B_x e^{-x\sqrt{h}}\right] \cdot \left[A_y e^{y\sqrt{-h}} + B_y e^{-y\sqrt{-h}}\right],\ h \neq 0$$

$$h = 0 : \Phi(x, y) = (\lambda_x x + \mu_x) \cdot (\lambda_y y + \mu_y)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich demnach aus

$$\boxed{\Phi(x, y) = (\lambda_x x + \mu_x) \cdot (\lambda_y y + \mu_y) + \int\limits_{h\neq 0} \left[A_x e^{x\sqrt{h}} + B_x e^{-x\sqrt{h}}\right] \cdot \left[A_y e^{y\sqrt{-h}} + B_y e^{-y\sqrt{-h}}\right]\ dh}$$

Randbedingungen: Wir fordern dass $\Phi(x, \infty) = 0$ ist, woraus folgt dass $\lambda_y = 0$ bzw. $\Phi_{h=0}(x, y) \equiv 0$ und $A_y = 0$ sein muss. Demnach:

$$\Phi_h(x, y) = \left[A_x e^{x\sqrt{h}} + B_x e^{-x\sqrt{h}}\right] \cdot B_y e^{-y\sqrt{-h}}$$

Durch die Bedingung

$$\Phi(0,y) = \Phi(a,y) \overset{!}{=} 0 \;\forall\; y \in (0,\infty)$$

ergibt sich notwendigerweise

$$\Phi_x(0) = \Phi_x(a) = 0 \;\rightarrow\; A_x + B_x = A_x e^{a\sqrt{h}} + B_x e^{-a\sqrt{h}} = 0 \;\rightarrow\; A_x \cdot \left[e^{a\sqrt{h}} - e^{-a\sqrt{h}}\right] = 0$$

Da $\Phi_x \equiv 0$ nicht die gesuchte Lösung sein kann (aufgrund der RB $\Phi(x,0) = \Phi_0$), muss $A_x \neq 0$ sein, also

$$e^{a\sqrt{h}} = e^{-a\sqrt{h}}$$

Ist $h \geq 0$, muss $h = 0$ sein, doch das ergab wie wir gesehen haben die triviale Lösung $\Phi \equiv 0$.
Betrachten also den Fall $h < 0$, woraus sich eine Schar von Möglichkeiten ergibt. Wir nennen $k := \sqrt{-h}$ und erhalten

$$e^{iak} = e^{-iak} \;\rightarrow\; \sin ak = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{n\pi}{a} =: k_n,\; n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow\; \Phi_{xn} = A_{xn}\left[e^{ixk_n} - e^{-ixk_n}\right] = A_n \sin(xk_n),\; A_n := 2iA_{xn} \in \mathbb{R}$$

Ferner ergibt sich

$$\Phi_{yn} = B_{yn} e^{-yk_n}$$

und zusammengefasst

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_n e^{-yk_n} \cdot \sin(xk_n)}$$

Durch die Bedingung

$$\Phi(x,0) \overset{!}{=} \Phi_0 \;\forall\; x \in (0,a)$$

ergibt sich

$$\int_0^a \left\{\sin(xk_m) \cdot \sum_n W_n \sin(xk_n)\right\}\, dx = \sum_n W_n \int_0^a \sin(xk_m)\sin(xk_n)\, dx = \sum_n W_n \cdot \frac{a}{2}\delta_{nm} = \frac{a}{2} W_m$$

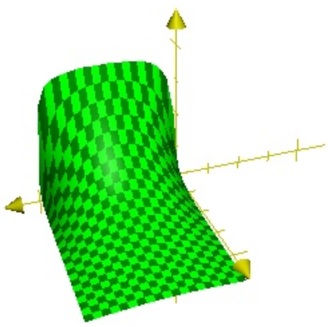
$$= \int_0^a \Phi_0 \sin(xk_m)\, dx = \frac{\Phi_0 a}{m\pi} \cdot (1 - \cos(m\pi)) = \frac{\Phi_0 a}{m\pi}(1 - (-1)^m)$$

$$\Rightarrow\; W_m = \frac{2\Phi_0}{m\pi}(1 - (-1)^m)$$

woraus sich die spezielle Lösung ergibt als

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \cdot \sum_n \frac{(1-(-1)^n)}{n} \cdot e^{-\frac{yn\pi}{a}} \cdot \sin\left(\frac{xn\pi}{a}\right)}$$

Oberes Potential erfüllt die Laplace Gleichung und auch die Randbedingungen! Das Feld wird für $z = 0$ im folgenden illustriert:



b) Wir zeigen dass diese Funktion eine Lösung der DGL ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\Phi_0}{a} \cdot \frac{\cos \pi x/a \cdot \sinh \pi y/a}{\sinh^2 \pi y/a + \sin^2 \pi x/a}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2\pi\Phi_0}{a^2} \cdot \sinh \pi y/a \cdot \sin \pi x/a \cdot \frac{\left(1 + \sinh^2 \pi y/a + \cos^2 \pi x/a\right)}{\left(\sinh^2 \pi y/a + \sin^2 \pi x/a\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2\Phi_0}{a} \cdot \frac{(\sin \pi x/a \cdot \cosh \pi y/a)}{(\sinh^2 \pi y/a + \sin^2 \pi x/a)}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{2\pi\Phi_0}{a^2} \cdot \sinh \pi y/a \cdot \sin \pi x/a \cdot \frac{\left(\sin^2 \pi x/a + \sinh^2 \pi y/a - 2\cosh^2 \pi y/a\right)}{\left(\sinh^2 \pi y/a + \sin^2 \pi x/a\right)^2}$$

$$= \frac{2\pi\Phi_0}{a^2} \cdot \sinh \pi y/a \cdot \sin \pi x/a \cdot \frac{\left(1 + \cos^2 \pi x/a + \sinh^2 \pi y/a\right)}{\left(\sinh^2 \pi y/a + \sin^2 \pi x/a\right)^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Ferner zeigen wir das die RB erfüllt sind:

$$y > 0 : \Phi(0, y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin 0}{\sinh y\pi/a}\right) = 0, \quad \Phi(a, y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin \pi}{\sinh \pi y/a}\right) = 0$$

$$x \in (0, a) : \lim_{h \to 0} \Phi(x, h) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \lim_{h \to 0} \arctan\left(\frac{\sin \pi x/a}{\sinh \pi h/a}\right) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan \infty = \Phi_0$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung ist dies genau das gleiche Potential wie im Teil (a) ermittelt wurde.

Aufgabe 03

Wegen

$$0 = \delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Phi + \delta\Phi) - \mathcal{U}(\Phi) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V dV \left\{ (\mathrm{grad}(\Phi + \delta\Phi))^2 - (\mathrm{grad}\,\Phi)^2 \right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V dV \left\{ (\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{grad}\,\delta\Phi)^2 - (\mathrm{grad}\,\Phi)^2 \right\} = \varepsilon_0 \int_V dV \left\{ \mathrm{grad}\,\Phi \cdot \mathrm{grad}\,\delta\Phi + (\mathrm{grad}\,\delta\Phi)^2 \right\}$$

$$\approx \varepsilon_0 \int_V dV \,\mathrm{grad}\,\Phi \cdot \mathrm{grad}\,\delta\Phi \stackrel{*}{=} \varepsilon_0 \int_{\partial V} \delta\Phi \,\mathrm{grad}\,\Phi \; d\vec{A} - \varepsilon_0 \int_V \delta\Phi \Delta\Phi \; dV, \quad (*) : \text{1e } \textit{Greensche Formel}$$

schreiben wir

$$\int_{\partial V} \delta\Phi \,\mathrm{grad}\,\Phi \; d\vec{A} = \int_V \delta\Phi\Delta\Phi \; dV$$

Da $\delta\Phi$ am Rand ∂V verschwinden soll, folgt

$$\int_V \delta\Phi\Delta\Phi \; dV = 0$$

Aus der beliebigkeit von $\delta\Phi$ folgt demnach

$$\Delta\Phi = 0$$

was genau die Laplace Gleichung darstellt!