Institut für Festkörpertheorie und -optik
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik WS 2007/2008
Serie 06

Energie und Randwertprobleme

Aufgabe 1): Feldenergie im Kugelkondensator [3 Punkte]

Gegeben sei ein Kugelkondensator bestehend aus zwei ineinander geschachtelten sehr dünnen Kugelschalen mit den Radien $R_1 < R_2$. Überlegen Sie wie sich die Ladungsdichte mittels δ-Distributionen geeignet darstellen läßt.

(a) Berechnen Sie die Energiedichte und die Gesamtenergie des elektrischen Feldes in diesem Kondensator. Die beiden Belegungen sollen dabei die Ladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$ tragen.

(b) Wie ändert sich die Energie, wenn $Q_1 = Q(-Q/2)$ und $Q_2 = -Q/2(Q)$ ist?

(c) Welcher Druck wird auf die Schalen des Kugelkondensators in allen drei zu betrachtenden Fällen ausgeübt?

Aufgabe 2): Laplace-Gleichung mit Randbedingung [4 Punkte]

Das Volumen $V = \{\boldsymbol{r} : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \infty, -\infty \leq z \leq \infty\}$ sei durch Metallplatten begrenzt. Die beiden Seitenplatten ($x = 0$, $x = a$) seien geerdet. Die Bodenplatte ($y = 0$) habe das Potential Φ_0.

(a) Lösen Sie die Laplacegleichung im Inneren des Kastens mit Hilfe eines Separationsansatzes und geben Sie die allgemeine Lösung an. Bestimmen Sie die Konstanten der Lösung so, daß die Randbedingungen erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, daß das Potential auch in der Form

$$\Phi(x, y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin \pi x/a}{\sinh \pi y/a}\right)$$

geschrieben werden kann.

Hinweis: Machen Sie Gebrauch von der Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems.

Aufgabe 3): Minimalitätsprinzip [2 Punkte]

Am Rand R des Volumens V sei das Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ fest vorgegeben. In V soll das Feld dem Variationsprinzip

$$U\left[\Phi\right] = \frac{\epsilon_0}{2} \int\limits_V d^3\boldsymbol{r} \ \ \left(\mathrm{grad}\Phi(\boldsymbol{r})\right)^2 = \text{minimal}$$

genügen. Leiten Sie daraus eine DGL für $\Phi(\boldsymbol{r})$ ab.

Hinweis: Das elektrostatische Feld stellt sich demnach so ein, daß die Feldenergie nach obiger Gleichung minimal ist. Die Feldenergie $U[\Phi]$ *ist ein Funktional von* Φ*. Die Minimalitätsbedingung impliziert* $\delta U = U[\Phi + \delta\Phi] - U[\Phi] = 0$ *wobei* $\delta\Phi(\boldsymbol{r})$ *eine kleine (aber beliebige) Variation ist, die am Rand verschwindet.*

Abgabetermin: Mittwoch, 05. 12. 2007, vor der Vorlesung