Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

3. Dezember 2007

Aufgabe 01

Das Multipolmoment $Q_{k_1 k_2 \dots k_n}$ n-ter Ordnung einer bestimmten Ladungsverteilung über dem Volumen V_ρ ist definiert als

$$Q_{k_1 \dots k_n} := 4\pi\varepsilon_0 (-1)^n \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')r'^{2n+1} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_n}(\vec{r}\,')$$

und stellt einen Tensor n-ter Stufe dar. Dabei ist

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

die Greensche Funktion des linearen Differentialoperators Operators

$$-\varepsilon_0 \Delta$$

Das Dipolmoment $\vec{P}$ ($n = 1$) ergibt sich also allgemein als

$$P_i = -4\pi\varepsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')r'^3 \frac{\partial G_0}{\partial x_i}(\vec{r}\,') = \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')r'^3 \frac{x_i'}{r'^3} = \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')x_i' \;\rightarrow\; Q^1 = \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'$$

bzw. über eine diskrete Ladunsverteilung

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Das Quadrupolmoment D ($n = 2$) ist analog gegeben durch

$$D_{ij} = 4\pi\varepsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')r'^5 \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}\,') = \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,')r'^5 \frac{\left(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right)}{r'^5} = \int_{V_\rho} dV' \; \rho(\vec{r}\,') \left(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right)$$

bzw. über eine diskrete Ladungsverteilung

$$D_{ij} = \sum_k q_k \cdot \left(3x_k^i x_k^j - r_k^2 \delta^{ij}\right), \; \vec{r}_k = x_k^i \vec{e}_i$$

In unserem Spezialfall ergibt sich also

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{8} q_i \vec{r}_i = q \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{3}{2} dq \cdot \vec{e}_x$$

$$D = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \sum_k q \cdot \begin{pmatrix} 3x_k^2 - r_k^2 & 3x_k y_k & 3x_k z_k \\ 3y_k x_k & 3y_k^2 - r_k^2 & 3y_k z_k \\ 3z_k x_k & 3z_k y_k & 3z_k^2 - r_k^2 \end{pmatrix} = \frac{33}{4} qd^2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 02

Das Ellipsoid sei gegeben durch

$$\mathcal{E} := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Betrachten zuerst die Quadrupolmomente $D_{ij},\ i \neq j$. Diese ergeben sich aus

$$D_{ij} = 3\rho_0 \cdot \int_{\mathcal{E}} x_i' x_j \ dV$$

Für jedes Volumenelement der Ladung $\rho_0 dV$ an der Stelle (x, y, z) gibt es ein gleiches Volumenelement der Ladung $\rho_0 dV$ an der Stelle $(-x, y, z)$. Analoges gilt für alle Volumenelemente an der Stelle $x_i\vec{e}_i + x_j\vec{e}_j,\ i \neq j$. Man kann alle, aufgrund von Symmetriegründen, bijektiv, mit jeweils einem Volumenelement gleicher *Größe* an der Stelle $-x_i\vec{e}_i + x_j\vec{e}_j$ assoziieren. Dabei heben diese sich alle gegenseitig auf, da $x_i x_j dV - x_i x_j dV = 0$. Also ist $D_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Wir betrachten jetzt die Diagonalelemente $D_{xx},\ D_{yy},\ D_{zz}$. Für D_{xx} folgt

$$D_{xx} = \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \left(3x^2 - r^2\right) dV = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \left(2a^2\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta - b^2\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta - c^2\rho^2 \sin^2\vartheta\right) abc\rho^2 \sin\vartheta \ d\rho \ d\vartheta \ d\varphi$$

$$= \frac{abc\rho_0}{5} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(2a^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta - b^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta - c^2 \cos^2\vartheta\right) \sin\vartheta \ d\vartheta \ d\varphi$$

$$= \frac{abc\rho_0}{5} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}a^2 \cos^2\varphi - \frac{4}{3}b^2 \sin^2\varphi - \frac{2}{3}c^2\right) \ d\varphi = \frac{4abc\pi\rho_0}{15} \left(2a^2 - b^2 - c^2\right)$$

Aus Symmetrieüberlegungen bei der Definition von D ergibt sich analog

$$D_{yy} = \frac{4abc\pi\rho_0}{15} \left(2b^2 - a^2 - c^2\right), \quad D_{zz} = \frac{4abc\pi\rho_0}{15} \left(2c^2 - a^2 - b^2\right)$$

Aufgabe 03

Das Dipolmoment $\vec{P}$ des Atoms ist allgemein gegeben durch

$$\vec{P} = \int_{\mathcal{U}} \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,' \ dV'$$

wobei $\mathcal{U}$ das gesamte Universum sei. Die Ladungsdichte des Atoms ist normalerweise gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}}_{\rho_e(\vec{r})} + e\delta(\vec{r})$$

wobei der Term $e\delta(\vec{r})$ eben genau die Ladungsdichte des Protons ist. Bei einer Verschiebung des Elektrons um $\vec{r}_0$ ist die neue Ladungsdichte des Atoms gegeben durch

$$\rho_v(\vec{r}) = \rho_e\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) + e\delta(\vec{r})$$

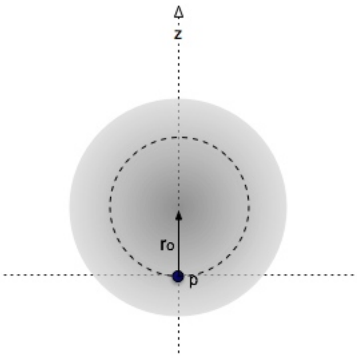
a) Das dadurch entstehende Dipolmoment bzgl. des Ursprungs ergibt sich demnach als

$$\vec{P} = \int_{\mathcal{U}} \rho_v(\vec{r})\vec{r} \ dV = \int_{\mathcal{U}} \rho_e\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \vec{r} dV + \underbrace{\int_{\mathcal{U}} e\delta(\vec{r})\vec{r} \ dV}_{0} \stackrel{*}{=} \int_{\mathcal{U}} \rho_e\left(\vec{u}\right) \left(\vec{u} + \vec{r}_0\right) \ dV$$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal{U}} \rho_e\left(\vec{u}\right) \vec{u} \ dV}_{0\ **} + \vec{r}_0 \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{U}} \rho_e\left(\vec{u}\right) \ dV}_{-e} = -e \cdot \vec{r}_0$$

(*) Sub: $\vec{u} := \vec{r} - \vec{r}_0$
(**) Da $\rho_e(-\vec{u}) = \rho_e(\vec{u})$

b) Betrachten die Kugel[schale] K bzw. ∂K mit dem Radius $r_0 = |\vec{r}_0|$ mit dem Mittelpunkt im Symmetriepunkt der Elektron-Verteilung. Der Koordinatenursprung liege im Atomzentrum und sei $\vec{e}_z \parallel \vec{r}_0$.



Aufgrund von Symmetriegründen ist das vom Elektron erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ vom Betrag her an jedem Punkt von ∂K ins Zentrum gerichtet und vom Betrag her konstant. Dann ergibt sich durch den Gaußschen Satz

$$4\pi r_0^2 \varepsilon_0 E(0) = \int_K \rho(\vec{r}\,') \; dV = -\frac{e}{\pi a^3} \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \cdot e^{-2r/a} \; dr = -\frac{4e}{a^3} \cdot \left[e^{-2r/a} \cdot \left(-\frac{ar^2}{2} - \frac{a^2 r}{2} - \frac{a^3}{4} \right) \right]_0^{r_0}$$

$$= \frac{4e}{a^3} \cdot \left[e^{-2r_0/a} \left(\frac{ar_0^2}{2} + \frac{a^2 r_0}{2} + \frac{a^3}{4} \right) - \frac{a^3}{4} \right]$$

$$\rightarrow \; \vec{E}(0) = \frac{e}{\pi \varepsilon_0 r_0^2 a^3} \cdot \left[\frac{a^3}{4} - e^{-2r_0/a} \left(\frac{ar_0^2}{2} + \frac{a^2 r_0}{2} + \frac{a^3}{4} \right) \right] \cdot \vec{e}_z$$

Damit ergibt sich die auf das Proton wirkende Kraft als

$$\boxed{\vec{F} = e\vec{E} = \frac{e^2}{\pi \varepsilon_0 r_0^2} \cdot \left[\frac{1}{4} - e^{-2r_0/a} \left(\frac{r_0^2}{2a^2} + \frac{r_0}{2a} + \frac{1}{4} \right) \right] \cdot \vec{e}_z}$$

Für $r_0/a << 1$ näherungsweise

$$\vec{F} \approx \frac{e^2}{\pi \varepsilon_0 r_0^2} \left[\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{2r_0}{a} + \frac{2r_0^2}{a^2} - \frac{4r_0^3}{3a^3} \right) \cdot \left(\frac{r_0^2}{2a^2} + \frac{r_0}{2a} + \frac{1}{4} \right) \right] \cdot \vec{e}_z = -\frac{e^2}{3\varepsilon_0 a^2 \pi} \cdot \left[\frac{r_0}{a} + \mathcal{O}\left(\frac{r_0}{a} \right)^3 \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\approx -\frac{e^2}{3\pi \varepsilon_0 a^3} \cdot \vec{r}_0 = \frac{e}{3\pi \varepsilon_0 a^3} \cdot \vec{P}$$