Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

22. November 2007

Aufgabe 01

Ist $\rho = \rho(r, \vartheta, \varphi)$ die Ladungsverteilung in Kugelkoordinaten, dann gilt allgemein

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Speziell folgt für das Wasserstoffatom für $r > 0$:

$$\rho = -\varepsilon_0\Delta\Phi = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -\frac{q_e}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-2r/a}\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\right]\right\}$$

$$= +\frac{q_e}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{e^{-2r/a}\cdot\left[\frac{2}{a}\left(r+\frac{r^2}{a}\right)+1\right]\right\} = +\frac{q_e}{4\pi r^2}\cdot e^{-2r/a}\cdot\left\{-\frac{2}{a}\left[\frac{2}{a}\left(r+\frac{r^2}{a}\right)+1\right]+\frac{2}{a}\left(1+\frac{2r}{a}\right)\right\}$$

$$= -\frac{q_e}{\pi a^3}\cdot e^{-2r/a}$$

wobei q_e der Betrag der Elementarladung ist. Obere ist die Kontinuierliche Ladungsverteilung des Elektrons, bzw. die Ladung des Elektrons $-q_e$ multipliziert mit der entsprechenden Aufenthaltswarscheinlichkeitsdichte-Funktion. Integrieren wir nämlich über den Raum (abgesehen vom Nullpunkt) bekommen wir die gesamte negative Ladung

$$\int\limits_{Universum}\rho\,dV = \int_0^\infty \rho(r)\cdot 4\pi r^2\,dr = -\frac{4q_e}{a^3}\cdot\int_0^\infty r^2 e^{-2r/a}\,dr = -\frac{4q_e}{a^3}\cdot\left[e^{-2r/a}\cdot\left(-\frac{ar^2}{2}-\frac{a^2 r}{2}-\frac{a^3}{4}\right)\right]_0^\infty = -q_e$$

Um die (diskrete) Ladungsverteilung im Nullpunkt zu bekommen Integrieren wir über eine gedachte Kugel mit dem (im Nachhinein verschwindenden) Radius R:

$$Q_0 = \lim_{R\to 0}\int\limits_{K(R)}\rho\,dV = \lim_{R\to 0} -\varepsilon_0\cdot\int\limits_{K(R)}\Delta\Phi\,dV = \lim_{R\to 0} -\varepsilon_0\cdot\int\limits_{K(R)}\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi\,dV$$

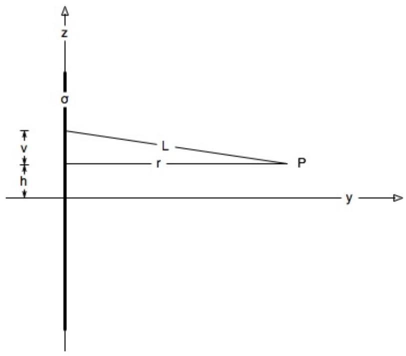
$$= \lim_{R\to 0} -\varepsilon_0\int\limits_{\partial K(R)}\operatorname{grad}\Phi\,d\vec{A} = \lim_{R\to 0} -\frac{q_e}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-2r/a}\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\right]_R\cdot\int\limits_{\partial K(R)}\vec{e}_\rho\cdot d\vec{A}$$

$$= \lim_{R\to 0}\frac{q_e}{4\pi}\cdot e^{-2R/a}\cdot\left[\frac{2}{a}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{R^2}\right]\cdot 4\pi R^2 = q_e$$

und bekommen so genau die Ladung des Protons.

Aufgabe 02

a) Aufgrund von Symmetriegründen ist das Potential U am Punkt $P = r \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$ nur eine Funktion des Abstandes r von dem Faden und der z-Koordinate.

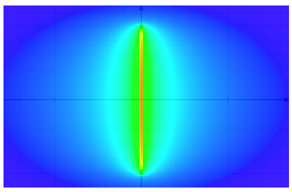


Das Potential U ergibt sich durch Integration über den gesamten Faden

$$U(r,z) = U(r,h) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-l-h}^{l-h} \frac{\sigma}{\sqrt{r^2+v^2}}\, dv = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\ln\left(v + \sqrt{r^2+v^2}\right)\right]_{-l-h}^{l-h}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{(l-h)+\sqrt{(l-h)^2+r^2}}{-(l+h)+\sqrt{(l+h)^2+r^2}}\right) \equiv \frac{\sigma}{4\varepsilon_0\pi} \cdot \ln\left[\frac{1}{r^2} \cdot \left(l - z + \sqrt{(l-z)^2+r^2}\right) \cdot \left(l + z + \sqrt{(l+z)^2+r^2}\right)\right]$$

Illustriert sieht das Feld wie folgt aus



Durch differenzieren erhalten wir das Elektrische Feld

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_\rho - \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left\{\frac{2}{r} - \frac{r}{\left[(l-z)\sqrt{(l-z)^2+r^2} + (l-z)^2 + r^2\right]} - \frac{r}{\left[(l+z)\sqrt{(l+z)^2+r^2} + (l+z)^2 + r^2\right]}\right\} \cdot \vec{e}_\rho$$

$$+ \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{(l-z)^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+z)^2+r^2}}\right\} \cdot \vec{e}_z$$

b) Betrachten den Fall $l \to \infty$. Aufgrund von Symmetriegründen ist das Potential U am Punkt P nur eine Funktion vom Abstand r. Wir betrachten zuerst das Potential um einen unendlich langen Zylinder mit der Ladungsdichte ρ_0 und den Radius R und machen dann den Grenzübergang $R \to 0$. Bezeichnen mit U_i bzw. U_a das Potential innerhalb und außerhalb des Zylinders, und schreiben die allgemeine Poissongleichung

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Im Inneren ($r < R$) also:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; r\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\rho_0 r^2}{2\varepsilon_0} + C_1 \;\Rightarrow\; U = -\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r + C_2,\; C_1, C_2 : const$$

Bemerkung: Da $U = U(r)$ gilt
$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{dU}{dr}$$
Durch die Forderung $U(0) \neq \infty$ wird $C_1 = 0$ und wir bekommen

$$U_i(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0} + C_2$$

Analog für $r > R$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0 \;\Rightarrow\; r\frac{\partial U}{\partial r} = C_3 \;\Rightarrow\; U_a = C_3 \ln r + C_4,\; C_3, C_4 : const$$
Durch die Forderung $\partial_r U_i(R) \overset{!}{=} \partial_r U_a(R)$ (stetiger Übergang des E-Feldes an den Grenzen) folgt

$$-\frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0} = \frac{C_3}{R} \;\Rightarrow\; C_3 = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Wir fordern außerdem dass das Potential an der Stelle $r = \lambda > R$ gleich 0 ist. Also

$$U_a(\lambda) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ln\lambda + C_4 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; C_4 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

und wir bekommen das Potential für $r > R$

$$\boxed{U_a(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)}$$

Die Dichte ρ_0 entspricht beim Zylinder einer Linienladungsdichte $\sigma = \rho_0 \pi R^2$. Für den unendlich langen Draht erhalten wir also
$$U_d(r) = \lim_{R\to 0}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$
Das Elektrische Feld ergibt sich durch Differenzieren:

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial}{\partial r}U_d(r)\cdot\vec{e}_\rho = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e}_\rho = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot(\cos\varphi\cdot\vec{e}_x + \sin\varphi\cdot\vec{e}_y) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2)}\cdot(x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y)$$

c) Das Molekül befinde sich o.B.d.A auf der Y-Achse an der Stelle $(0, r, 0),\; r := d$ und habe das Dipolmoment

$$\vec{p} = p_x\cdot\vec{e}_x + p_y\cdot\vec{e}_y + p_z\cdot\vec{e}_z = p_\rho\cdot\vec{e}_\rho + p_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + p_z\cdot\vec{e}_z$$

Dann ergibt sich für das Molekül eine Kraft

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\,\vec{\nabla}\right)\vec{E} = \begin{pmatrix} p_x\partial_x E_x + p_y\partial_y E_x + p_z\partial_z E_x \\ p_x\partial_x E_y + p_y\partial_y E_y + p_z\partial_z E_y \\ p_x\partial_x E_z + p_y\partial_y E_z + p_z\partial_z E_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\begin{pmatrix} p_x\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} - p_y\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + p_z\cdot 0 \\ \\ -p_x\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + p_y\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + p_z\cdot 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\cdot\begin{pmatrix} p_x(y^2-x^2) - 2p_y xy \\ p_y(x^2-y^2) - 2p_x xy \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\begin{pmatrix} p_x \\ -p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(*) : y = r,\; x = 0$

Für das Dipolmoment ergibt sich

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot(p_\rho\cdot\vec{e}_\rho + p_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + p_z\cdot\vec{e}_z)\times\vec{e}_\rho = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot(p_z\cdot\vec{e}_\varphi - p_\varphi\cdot\vec{e}_z)$$

d) Laut Tabellenwerten beträgt das Dipolmoment $\vec{p}_w$ des Wasserstoffmoleküls 1.84 Debye $\approx 6.14 \cdot 10^{-30}\ C \cdot m$. Für $d = 10mm$ und $\sigma = 10^{-3} C/m$ ergibt sich z.B. bei einer Dipolmomentorientierung in Richtung $\vec{p}_w \parallel \vec{e}_\rho \parallel \vec{e}_y$:

$$\vec{F}_w = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 d^2} \cdot p_w \cdot \vec{e}_y \approx 1.104 \cdot 10^{-18} \cdot \vec{e}_y\ N$$

Analog ist auch bei anderen Raumorientierungen vorzugehen.

Aufgabe 03

Es gilt für das über die Oberfläche ∂G gemitelte Potential Φ_m:

$$\Phi_m = \frac{1}{\int_{\partial V} dA} \cdot \int_{\partial V} \Phi\ dA = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \int_{\partial V} \Phi\ dA$$

Wählen $\Psi(\vec{r}) := \dfrac{1}{4\pi\,|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi r}$ und verwenden den Greenschen Satz auf einer Kugel (Ladungsdichte 0) mit dem Mittelpunkt in 0:

$$\int_V \left\{ \Phi\Delta\Psi - \Psi \underbrace{\Delta\Phi}_{0} \right\} dV = -\int_V \Phi\delta(\vec{r}) = -\Phi(0)$$

$$= \int_{\partial V} [(\nabla\Psi)\Phi - (\nabla\Phi)\Psi]\ d\vec{A} = \int_{\partial V} \left[-\frac{\Phi}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_\rho - (\nabla\Phi)\frac{1}{4\pi r} \right] dA \cdot \vec{e}_\rho$$

$$= -\frac{1}{4\pi R^2} \cdot \int_{\partial V} \Phi\ dA - \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial V} (\nabla\Phi)\ d\vec{A} = -\Phi_m - \frac{1}{4\pi R} \int_V \underbrace{\operatorname{div}\nabla\Phi}_{0}\ dV = -\Phi_m$$

$$\Rightarrow\ \Phi_m = \Phi_0$$

Wir wollen zeigen dass kein lokales Extremum des Feldes Φ innerhalb von G existieren kann.
Sei $\vec{r}_0 \in G$ ein Punkt wo Φ ein lokales Extremum hat, o.B.d.A ein Minimum. Dann gibt es eine offene Umgebung U um $\vec{r}_0$ so dass $\vec{r}_0 \in U \subset G$ und

$$\forall\ \vec{r} \in U:\ \vec{r} \neq \vec{r}_0 \Rightarrow \Phi(\vec{r}) > \Phi(\vec{r}_0)$$

Doch da U offen ist gibt es eine Kugel $K_R(\vec{r}_0)$ mit dem Radius $R > 0$ um $\vec{r}_0$ herum, so dass $K_R(\vec{r}_0) \subset U$. Daraus folgt jedoch

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \int\limits_{\partial K_R(\vec{r}_0)} \Phi(\vec{r})\ dA > \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial K_R(\vec{r}_0)} \Phi(\vec{r}_0)\ dA = \frac{\Phi(\vec{r}_0)}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial K_R(\vec{r}_0)} dA = \Phi(\vec{r}_0)$$

was ein Widerspruch ist! Demzufolge gibt es keine lokalen Extrema von Φ und somit auch keine stabilen Gleichgewichtspunkte in G. $\square$