INSTITUT FÜR FESTKÖRPERTHEORIE UND -OPTIK
FRIEDRICH-SCHILLER UNIVERSITÄT JENA

Elektrodynamik WS 2007/2008
Serie 04

Elektrostatisches Potential

Aufgabe 1): Wasserstoffatom

Das Potential eines neutralen Wasserstoffatoms im Grundzustand ist im zeitlichen Mittel durch

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\exp\left(-2r/a\right)}{r}\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

gegeben, wobei e der Betrag der Elementarladung ist und a den sog. Bohr'schen Radius bezeichnet. Man bestimme die (kontinuierliche wie auch diskrete) Ladungsverteilung, die dieses Potential erzeugt und interpretiere die Ergebnisse physikalisch.

Aufgabe 2): Linienförmige Ladungsverteilung und Dipol

Auf der z-Achse liege zwischen den Punkten $z = -l$ und $z = +l$ ein Faden der Länge $2l$, der eine Ladung konstanter Liniendichte σ (Einheit: Ladung/Längeneinheit) trägt.

(a) Man berechne für diese Ladungsverteilung das elektrische Potential Φ als Funktion der Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z. Bestimme daraus die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{e_\rho} + E_\phi \boldsymbol{e_\phi} + E_z \boldsymbol{e_z}$ Was ergibt sich für die Feldstärke im Grenzfall $l \to \infty$?

(b) Außerdem befinde sich in der x-y-Ebene in einem Abstand d von der z-Achse ein Molekül mit einem Dipolmoment $\boldsymbol{p}$. Berechne die Kraft $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}$ und das Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$, die der geladene Faden im Grenzfall $l \to \infty$ auf den Dipol ausüben. Das Feld des geladenen Fadens soll hierbei als externes Feld angesehen werden, daß heißt die Rückwirkung des Dipols auf den Faden kann vernachlässigt werden.

(c) Berechne Kraft und Drehmoment auf ein H_2O-Molekül für $\sigma = 10^{-3} C/m$ und $d = 10mm$.

Aufgabe 3): Mittelwertsatz

In einem Raumgebiet G herrsche ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, welches von einer statischen Ladungsverteilung außerhalb von G erzeugt wird (in G verschwinde also die Ladungsdichte). Zeige, daß durch **kein** derartiges Feld eine an die Stelle $\boldsymbol{r_0} \epsilon G$ gesetzte Probeladung q im stabilen Gleichgewicht gehalten werden kann!

Anleitung: Sei $\Phi : G \to \mathbf{R}$ das zu $\boldsymbol{E}$ gehörige Potential mit $\Delta\Phi = 0$. Man zeige, daß der über die Oberfläche einer Kugel gemittelte Wert des Potentials mit dem Wert von Φ im

Mittelpunkt der Kugel übereinstimmt. Dieses Ergebnis benutze man anschließend um zu zeigen, daß die potentielle Energie $q\Phi(\boldsymbol{r})$ des Probekörpers kein lokales Extremum innerhalb von G besitzen kann.

Hinweis: Unter dem über die Fläche F gemittelten Wert von Φ *verstehen wir:*

$$< \Phi >_F := \frac{1}{\int_F df} \int\limits_F \Phi(\boldsymbol{r}) df.$$

Man verwende den 2. Green'schen Satz:

$$\int\limits_V \Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi = \int\limits_{\partial V} (\nabla \Psi) \Phi - (\nabla \Phi) \Psi$$

unter geeigneter Wahl von $\Psi(\boldsymbol{r})$ *um den Mittelwertsatz zu beweisen.*

Abgabetermin: Mittwoch, 21. 11. 2007, vor der Vorlesung