Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

7. November 2009

Aufgabe 01

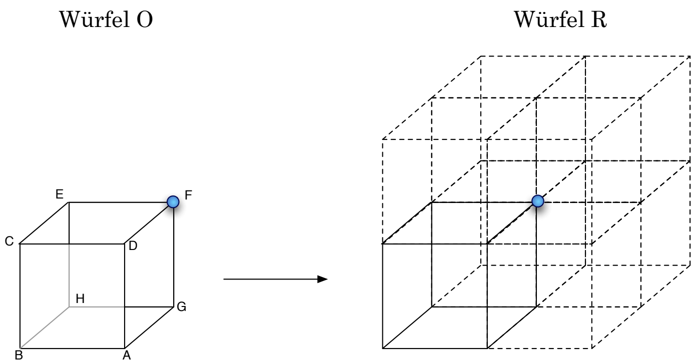
a) Sei ∂V die Randfläche des Würfelvolumens V und $\vec{E}(\vec{r})$ das durch die Punktladung q entstehende elektrische Feld. Dann ergibt sich ein Gesamtfluss

$$\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}\ dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

durch den Würfel, wobei ρ die lokale Ladungsdichte sei. Aufgrund von Symmetriegründen fließt durch jede Seite des Würfels der gleiche Fluss

$$\frac{\Phi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

b) **Annahme:** Betrachten folgenden gedachten *rießen-Würfel* $\mathcal{R}$, des aus 8 *original-Würfeln* $\mathcal{O}$ zusammengesetzt ist.



Das Elektron sitzt wieder in der Mitte dieses Würfels, weshalb durch jede dieser rießen-Seiten wieder der Fluss

$$\frac{\Phi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

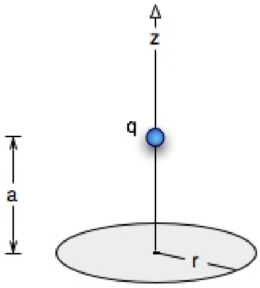
fließt. Aufgrund von Symmetriegründen ergibt sich für jedes Viertel dieser Flächen, und somit den Würfelflächen $\Gamma :=\{$ABCD, BCEH, ABGH$\}$, jeweils der gleiche Fluss

$$\frac{\Phi}{6 \cdot 4} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

Aufgrund von Symmetriegründen fließt durch die Flächen $\Delta :=\{$ EFGH, ADFG, CEFD$\}$ jeweils der gleiche Fluss. Doch über die Gesamtheit von $\Gamma \cup \Delta$ muss genau der Fluss $q/(8\varepsilon_0)$ fließen, da die gesamte Ladung im Würfel $q/8$ ist. Also ist der Fluß durch jede einzelne Fläche von Δ gleich 0.

Aufgabe 02

Sei K die Kreisfläche mit dem Radius r im Abstand a von der Punktladung q, und Φ der Fluss des elektrischen Feldes $\vec{E}$ durch K.



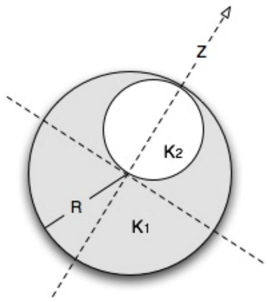
Wir verwenden Zylinderkoordinaten und bekommen

$$\Phi = \int_K \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{E} \cdot \vec{e}_z \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\rho\vec{e}_\rho - a\vec{e}_z)}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z \cdot \rho \, d\rho$$

$$= -\frac{qa}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^r \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \, d\rho = \frac{q}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} - 1 \right)$$

Aufgabe 03

Setzen unser Koordinatensystem in den Mittelpunkt B und unsere z-Achse in Richtung A. Nennen K_1 (Radius $R_1 = R$) die äußere Kugel und K_2 die innere Kugel (Radius $R_2 = \frac{R}{2}$).



Nennen $\vec{E}_P$ jeweils das elektrische Feld im Punkt $P \in \mathcal{P} := \{A, B, C, D\}$.
Allgemein ergibt sich das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Punkt $\vec{r}$ als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{K_1 \setminus K_2} \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV' = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{K_1} \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV'}_{{}^1\vec{E}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{K_2} \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV'}_{{}^2\vec{E}}$$

wobei ${}^1\vec{E}$ und ${}^2\vec{E}$ jeweils die Felder wären die von den Kugeln K_1 und K_2 resultieren würden, wäre K_2 mit der Ladungsdichte ρ geladen. In der Vorlesung wurde gezeigt dass für einen Abstand r_1 bzw. r_2 von den Kugelzentren gilt

$${}^i\vec{E}(r_i) = \begin{cases} \frac{r_i\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_\rho & : r_i \leq R_i \\ \frac{R_i^3\rho}{3r_i^2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_\rho & : r_i > R_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2$$

Da die Punktmenge $\mathcal{P}$ auf der z-Achse liegt (und diese durch die jeweiligen Kugelzentren läuft), sind hier die entsprechenden Feldrichtungen von ${}^1\vec{E}$ und ${}^2\vec{E}$ alle parallel bzw. antiparallel zu $\vec{e}_z$. Demnach können wir sofort schreiben:

$$\vec{E}_A =^1 \vec{E}_A -^2 \vec{E}_A = \left[\frac{R_1\rho}{3\varepsilon_0} - \frac{R_2\rho}{3\varepsilon_0}\right] \cdot \vec{e}_z = \frac{R\rho}{6\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_B = \underbrace{{}^1\vec{E}_B}_{0} -{}^2\vec{E}_B = \frac{R\rho}{6\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_C =^1 \vec{E}_C -^2 \vec{E}_C = \left[-\frac{R_1\rho}{3\varepsilon_0} + \frac{R_2^3\rho}{3(R_1+R_2)^2\varepsilon_0}\right] \cdot \vec{e}_z = -\frac{17R\rho}{54\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_D =^1 \vec{E}_D - \underbrace{{}^2\vec{E}_D}_{0} = \frac{R\rho}{6\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$