Theoretische Elektrodynamik
FSU Jena - WS 07/08
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

19. November 2007

Aufgabe 01

a) Induktionsannahme:

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\delta^{(n)}(x)\ dx = (-1)^n n! \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx$$

Induktionsanfang $n = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^0 f(x)\delta^{(0)}(x)\ dx = (-1)^0 0! \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx$$

Induktionsschritt $n+1$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^{n+1} f(x)\delta^{(n+1)}(x)\ dx = \underbrace{\left[\delta^{(n)}(x)\cdot x^{n+1} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} \left((n+1)x^n f(x) + \underbrace{x^{n+1} f'(x)}_{x^n\cdot(xf'(x))}\right)\cdot \delta^{(n)}(x)\ dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} (n+1)x^n f(x)\delta^{(n)}(x)\ dx - (-1)^n n! \left[xf'(x)\right]_{x=0} = -(-1)^n n!(n+1)\cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)! \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx \quad \square$$

b) Für die differenzierbare Funktion gilt nach dem Satz von Taylor in sehr kleinen Umgebungen um die Nullstellen $\lambda_i : f(x) \approx f(\lambda_i) + f'(\lambda_i)\cdot(x-\lambda_i) = f'(\lambda_i)(x-\lambda_i)$. Daraus folgt unter Verwendung von $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\left[f(x)\right] g(x)\ dx = \sum_i \int_{\lambda_i^-}^{\lambda_i^+} \delta(f(x))g(x)\ dx = \sum_i \int_{\lambda_i^-}^{\lambda^+} \delta\left[f'(\lambda_i)(x-\lambda_i)\right] g(x)\ d(x-\lambda_i)$$

$$= \sum_i \int_{\lambda_i^-}^{\lambda_i^+} \frac{1}{|f'(\lambda_i)|}\cdot \delta(x-\lambda_i)g(x)\ d(x-\lambda_i) = \int_{\mathbb{R}} \left\{\sum_i \frac{\delta(x-\lambda_i)}{|f'(\lambda_i)|} g(x)\right\}\ dx \quad \square$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}} dx\ \arctan(x)\delta'(x-1) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\cdot\delta(x-1)\ dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^\infty dx \frac{\delta(\cos x)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^\infty dx \frac{\delta\left(x-\pi\frac{(2n+1)}{2}\right)}{x^2}\cdot\frac{1}{\left|\cos'\left(\pi\frac{(2n+1)}{2}\right)\right|}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\pi\frac{(2n+1)}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 02

Bemerkung: Wir substituieren o.B.d.A $x := x - a$. Damit *verschiebt* sich die Kurve einfach nach links.

a) Die Funktion

$$L_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\eta}{\eta^2+x^2}$$

hat ihr Maximum offensichtlich im Punkt $x = 0$, wo sie den Wert $M_\eta := L_\eta(0) = \dfrac{1}{\eta\pi}$ annimmt. Die beiden Halbwertskoordinaten $x_{1,2}$ ergeben sich aus

$$L_\eta(x_i) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi\eta} \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\eta$$

woraus sich eine Halbwertsbreite $B_\eta = 2\eta$ ergibt. Es gilt

$$\lim_{\eta\to 0^+} M_\eta = \infty,\ \lim_{\eta\to 0^+} B_\eta = 0$$

b) Die Fläche A_η ergibt sich als

$$A_\eta = \int_{\mathbb{R}} L_\eta(x)\ dx = \left[\frac{1}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

c)

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_\alpha^\beta dx\ L_\eta(x) = \lim_{\eta\to 0^+}\frac{1}{\pi}\cdot\left[\arctan\left(\frac{x}{\eta}\right)\right]_\alpha^\beta = \lim_{\eta\to 0^+}\frac{1}{\pi}\cdot\left[\arctan\frac{\beta}{\eta} - \arctan\frac{\alpha}{\eta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{sgn}(\beta)-\mathrm{sgn}(\alpha)) = \begin{cases} 1 & : \alpha < 0 < \beta \\ -1 & : \beta < 0 < \alpha \\ 0 : \mathrm{sgn}(\alpha) = \mathrm{sgn}(\beta) & : \mathit{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{\eta\to 0^+} L_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\lim_{\eta\to 0^+}\frac{\eta}{\eta^2+x^2} = 0\ da\ L_x(\eta) := L_\eta(x)\ stetig\ in\ \eta = 0\ f\ddot{u}r\ x \neq 0$$

Obere Eigenschaften rechtfertigen die Äquivalenz

$$\lim_{\eta\to 0^+} L_\eta(x) \equiv \delta(x)$$

d) Da

$$e^{ikx-\varepsilon k} + e^{-ikx-\varepsilon k}$$

für $\varepsilon \to 0^+$ gleichmäßig zu

$$e^{ikx} + e^{-ikx}$$

konvergiert, können wir schreiben

$$H(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\infty \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\ dk = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\infty \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(e^{ikx-\varepsilon k} + e^{-ikx-\varepsilon k}\right)\ dk$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty \left(e^{ikx-\varepsilon k} + e^{-ikx-\varepsilon k}\right)\ dk = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty e^{-\varepsilon k}\cos(kx)\ dk$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{\varepsilon^2 e^{-\varepsilon k}}{\varepsilon^2 + x^2}\left(\frac{x\sin xk}{\varepsilon^2} - \frac{\cos xk}{\varepsilon}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ \infty & : x = 0 \end{cases}$$

Die Fläche A unter $H(x)$ ergibt sich als

$$A = \int_{\mathbb{R}} H(x)\ dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty dk\ \left(e^{ikx-\varepsilon k} + e^{-ikx-\varepsilon k}\right)\ dk \right\}\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arctan\frac{x}{\varepsilon}\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 1 = 1$$

Daraus ergibt sich dass $H(x)$ eine Distribution ist, und sogar $H(x) = \delta(x)$ gilt. $\square$

Aufgabe 03

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl} - 3\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km}$$

$$= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad \square$$