02. 11. 2007

INSTITUT FÜR FESTKÖRPERTHEORIE UND -OPTIK
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Übungen zur Elektrodynamik, WS 2007/2008
Übungsserie 2
Mathematische Grundlagen II

1.)

(a) Beweisen Sie die für $\delta^{(n)}(x)$, die n-te Ableitung der eindimensionalen δ-Funktion, gültige Beziehung

$$x^n f(x)\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! f(x)\delta(x) \tag{1}$$

wenn $f(x)$ in $x = 0$ n-mal differenzierbar ist.

(b) Beweisen Sie die Beziehung

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|f'(\lambda_i)|}\delta(x-\lambda_i) \quad \text{mit } f'(\lambda_i) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\lambda_i}, \tag{2}$$

wobei $f(x)$ nur einfache Nullstellen an den Stellen $x = \lambda_i$ habe! Verwenden Sie dabei $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$!

(c) Berechnen Sie folgende Ausdrücke!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \arctan x \delta'(x-1), \quad \int_{1}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\delta(\cos x)}{x^2} \tag{3}$$

2.) Betrachten Sie eine Folge von Lorentz-Kurven

$$L_\eta(x-a) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2}, \quad \eta > 0.$$

(a) Welchen Wert nimmt die Höhe des Maximums und die Breite der Kurve (Halbwertsbreite) für $\eta \to 0^+$ an?

(b) Bestimmen Sie den Wert der Fläche unter der Lorentz-Kurve!

(c) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

$$(i) \qquad \lim_{\eta\to 0^+} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}x L_\eta(x-a) = \begin{cases} 1 & \forall\ \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{sonst}, a \neq \alpha, \beta \end{cases}$$

$$(ii) \qquad \lim_{\eta\to 0^+} L_\eta(x-a) = 0 \ \ \forall\ x \neq a.$$

Was bedeutet das für $\lim\limits_{\eta\to 0^+} L_\eta(x)$?

(d) Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp(\mathrm{i}kx) = \delta(x)\,. \tag{4}$$

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie dazu zunächst den Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}k \{\exp[(\mathrm{i}x - \epsilon)k] + \exp[(-\mathrm{i}x - \epsilon)k]\}\,. \tag{5}$$

3.) Beweisen Sie die Identität $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Nutzen Sie die in der Vorlesung angegebenen Eigenschaften des total antisymmetrischen Pseudotensors.

Abgabetermin: Mittwoch, 07. 11. 2007, vor der Vorlesung